GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCIŢII

ANUL IX. No. 1 1 OCTOMVRIE 1942

BIBLIOTECA CENTRALĂ
„ARHIVA STATULUI"
SIBIIU

SOCIETATEA GAZETA MATEMATICĂ
CALEA GRIVIŢEI, 158. BUCUREŞTI 2. — TELEFON 3-9803

GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCIŢII

ANUL IX. No. 1 — 1 OCTOMVRIE 1942

ABONAMENTUL LEI 100 PE AN (9 numere)

Soluţii şi orice corespondenţă pe adresa:

Casa «Gazeta Matematică», Calea Griviţei 158. — Bucureşti 2

EXERCIŢII REZOLVATE

Exerciţii generale. *E. G. 403. Să se găsească expresiunea generală a numerelor, cărora mutându-le cifra cu care începe la coadă, să obţinem multiplii ai acelor numere.*

I. L.

Fie A un număr de α cifre şi fie N numărul căutat:

$$N = 10^{\alpha-1}.a + A$$

a fiind un număr de o cifră.

După enunţ ar trebui să avem:

$$10.A + a = M.N = k\ N$$

unde k este un întreg.

Deducem dar că:

$$A = \frac{a\ (10^{\alpha-1}.k - 1)}{10 - k}.$$

Vom avea atunci soluţiile:

k	1	2	3		4	5
a	oricare	8	7	$\neq 7$	par	5
α	oricare	oricare	oricare	6 q	oricare	oricare

k	6	7	8	9
a	4,8	oricare	par	oricare
α	oricare	oricare	oricare	oricare

I. L.

E. G. 406. Adunând suma a două numere de două cifre cu suma răsturnatelor lor, se obține 132.

Care sunt acele numere?

I. L.

Avem:

$$[(10.a+b)+(10.\alpha+\beta)]+[(10.b+a)+(10.\beta+\alpha)]=132.$$

De unde se deduce lesne că:

$$a+b+\alpha+\beta=12$$

a, b, α, β fiind de o singură cifră și a, $\alpha \geqq 1$, iar $a+\alpha \leqq 12$, avem să rezolvăm în numere întregi sistemele:

$$\begin{cases} a+\alpha=2 \\ b+\beta=10 \end{cases} ; \quad \begin{cases} a+\alpha=3 \\ b+\beta=9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+\alpha=11 \\ b+\beta=1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} a+\alpha=12 \\ b+\beta=0 \end{cases}$$

în care putem presupune de exemplu $a \geqq \alpha$.

I. L.

E. G. 424. Care este cel mai mic număr de forma $3^{\alpha}.5^{\beta}$, al cărui cub are de cinci ori mai mulți divizori decât el?

I. L.

Punând

$N=3^{\alpha}\ 5^{\beta}$, avem $N^3=3^{3\alpha}.5^{3\beta}$, atunci condiția este:

$$(3\alpha+1)\ (3\beta+1)=5\ (\alpha+1)\ (\beta+1)$$

de unde rezultă că:

$$\alpha+\beta+2=2\alpha\beta.$$

Valorile cele mai mici ale lui α și β care satisfac această egalitate sunt:

$$\alpha=1 \quad \text{și} \quad \beta=3 \quad \text{sau} \quad \alpha=3,\ \beta=1.$$

Din aceste două numere $N'=3^3.5^1$ și $N''=3^1.5^3$ cel mai mic număr este:

$$N=3^3.5^1=135.$$

I. L.

E. G. 425. Trei numere prime cu 5 divizate cu el, dau resturi diferite. Să se arate că suma acelor trei numere nu se poate divide niciodată cu 5.

I. L.

Fie $N_1 = 5.m + r_1$, $N_2 = 5.n + r_2$ şi $N_3 = 5.p + r_3$ cele trei numere, unde r_1, r_2, r_3 sunt trei numere diferite din 1, 2, 3, 4.

Formând toate combinările de trei din aceste patru resturi şi însumând numerele fiecărei combinări, nu putem avea pentru această sumă niciodată 5 căci, dacă înlăturăm $r_1 + r_2 + r_3 = 6$; 7; 8; 9. Deci suma acelor trei numere va fi de una din formele: M5 + 1, +2, +3, sau +4 unul din resturi din cele patru, trebuie să înlăturăm şi complementul său faţă de 5, iar celelalte două sunt complementare faţă de 5.

I. L.

E. G. 426. Să se arate că, dacă sporim deîmpărţitul şi împărţitorul cu un număr α, şi dacă micşorăm câtul cu acelaşi număr, restul rămânând neschimbat, atunci câtul este totdeauna mai mare decât împărţitorul, iar diferenţa lor are valoarea $(\alpha + 1)$.

I. L.

Fie: $D = I \times C + R$, atunci

$$D + \alpha = (I + \alpha) \times (C - \alpha) + R.$$

Scăzând una din alta, aceste două egalităţi, ne rămâne:

$$\alpha + 1 = C - I.$$

Adică tocmai ceea ce era de arătat.

I. L.

E. G. 428. Suma a două numere este M7 + 1. *In ce caz diferenţa între cubul unuia şi patratul celuilalt este* M7?

I. L.

Avem: A + B = M7 + 1, deci:

A	M7 + 0	+1	+2	+3	+4	+5	+6
B	M7 + 1	+0	+6	+5	+4	+3	+2

Prin urmare:

A^3	M7 + 0	+ 1	+ 1	+ 6	+ 1	+ 6	+ 6
B^2	M7 + 1	+ 0	+ 1	+ 4	+ 2	+ 2	+ 1

Deci vom avea:

$$A = M7 + 2 \text{ şi } B = M7 + 6$$

I. L.

E. G. 429. Suma a două numere prime este M5. *In ce caz suma patratului unuia şi cubului celuilalt este* M5 *?*

I. L.

Avem: $A + B = M5$, deci:

$A = M6 \pm 1$ şi $B = M6 \pm 1$ deoarece sunt prime. Atunci:

$$A^2 = M6 + 1 \quad \text{şi} \quad B^3 = M6 \pm 1.$$

Prin urmare, va trebui să avem:

$$A = M5 + 1 \quad \text{şi} \quad B = M5 - 1.$$

I. L.

E. G. 430. Un număr este în acelaşi timp de formele M5 + 2 *şi* M7 + 3. *De ce formă este acest număr faţă de împărţitorul* 5×7 *?*

I. L.

Avem: $N = 5 . m + 2 = 7 . n + 3 = 35 . p + r$ Deci:

$$n = \frac{5 . m - 1}{7} \quad \begin{cases} m = 3, \ 10 \\ n = 2, \ 7 \end{cases}$$

Prin urmare:

$$m = 7 . k + 3 \quad \text{şi} \quad n = 5 . k + 2.$$

Ceea ce ne dă:

$$N = 35 . k + 17.$$

I. L.

E. G. 431. Un număr de trei cifre, cât şi suma cifrelor lui sunt M31. *Să se arate că în acest caz suma dublului primei cifre şi triplului cifrei a doua este* M31.

I. L.

Fie $N = abc$, atunci:

$$100.a + 10.b + c = M31$$

$$a + b + c = M31.$$

Sau mai putem scrie:

$$7.a + 10.b + c = M31$$

$$a + b + c = M31.$$

Scăzând unul din altul obţinem:

$$6.a + 9.b = 3\ (2.a + 3.b) = M31.$$

I. L.

Până la 1 Septemvrie 1942 s'au primit soluţii bune la exerciţiile publicate în numerele 7, 8, 9 ale anului al VIII-lea*):

Liceul „Moise Nicoară", Arad.

Clasa V-a: Şchiopu R. Ioan (V: 732, 36, 8, 9; E. G.: 439, 41).
Clasa VIII-a: Orădeanu Tr. Titus (VII: 749, 69).

Liceul „Samuil Vulcan", Beiuş.

Clasa V-a: Sasu I. Ioan (V: 735, 8, 9, 40, 9; E. G.: 453, 9, 66).

Liceul „N. Bălcescu", Brăila.

Clasa V-a: Boerescu N. I. Cezar (V: 740, 3, 4, 5*, 6, 7, 9; E. G.: 466).

Liceul „Dr. Ioan Meşotă", Braşov.

Clasa VII-a: Florică Stelian (E. G.: 465, 6).

---

*) Numărul unui exerciţiu foarte bine rezolvat şi îngrijit redijat este însoţit de un asteric.

Liceul de fete „Carmen-Sylva", Bucureşti.

Clasa VI-a: Mateescu C. Virginia (E. G.: 453).

Liceul „Aurel Vlaicu", Bucureşti

Clasa IV-a: Leon Al. Mihail (IV: 632, 5*).

Liceul „Mihail Eminescu", Bucureşti.

Clasa VII-a: Aron I. Gheorghe (VII: 765, 7, 9, 70).

Liceul „Gheorghe Lazăr", Bucureşti.

Clasa VI-a: Timotin Al. Alexandru (VI: 723, 8, 32; E. G.: 453).
Clasa VII-a: Prişcu R. Alex. (VIII: 772).

Liceul „Cantemir Vodă", Bucureşti.

Clasa V-a: Diaconescu Grigore (V: 732, 6).

Liceul „Matei Basarab", Bucureşti.

Clasa V-a: Ieşan Şt. Alexandru (V: 741, 5*, 6).

Liceul „Titu Maiorescu", Bucureşti.

Clasa III-a: Seni Gh. Dinu (III: 207, 8),
Clasa IV-a: Chicoş Şt. Ştefan (IV: 624, 7).
Clasa VII-a: Grigoriu N. (VII: 772, 8).
Clasa VIII-a: Corbaru A. Dan (VIII: 541, 4, 50, 3, 5; E. G.: 440, 42), Laptew R. Paul (VIII: 548, 50, 3, 9, 63; E. G.: 466), Seni Claudiu (VIII: 548, 50, 3, 9, 61, 3; E. G.: 452, 66).

Colegiul Naţional „Sf. Sava", Bucureşti.

Clasa III-a: Dumitrescu F. Sorin (III: 198, 9, 200, 2, 4, 5, 6, 7, 8; IV: 624, 32, 4, 5; V: 732, 6, 8, 9, 45*, 6).
Clasa VI-a: Horbuniev P. Vasile (VI: 728*; E. G.: 452, 53).
Clasa VII-a: Dumitrescu F. Dan (E. G.: 447).

Liceul „Gheorghe Şincai", Bucureşti.

Clasa V-a: Danielescu C. Const. (V: 732, 3, 5*, 6, 8, 9).
Clasa VII-a: Constantinescu I. Emil (VII: 649, 50, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 72, 5, 6, 7, 8; VIII: 534, 59; E. G.: 445, 7), Constantinescu I. Mihail (VII: 662; E. G.: 429, 38, 40, 1, 5, 7, 66), Niculescu P. (VII: 769, 70, 2, 8; E. G.: 445, 52).

Liceul „Marele Voevod Mihai", Bucureşti.

Clasa VII-a: Bratu I. Eugen (VII: 772, 5, 6, 7).

Liceul „B. P. Hasdeu", Buzău.

Clasa VI-a: Petculescu D. Mircea (E. G.: 445, 7, 9, 50).

Liceul „Ştirbei-Vodă", Călăraşi.

Clasa VII-a: Ionescu C. Victor (VII: 765, 7), Iuga Gh. Ştefan (VII: 767, 9, 70, 2; VIII: 659; E. G.: 453).

Liceul Militar, Cernăuţi.

Clasa V-a: Damian V. Corneliu (V: 732), Guţu Constantin (V: 732, 4*).

Liceul „Alecu Russo", Chişinău.

Clasa VII-a: Vasiliu A. B. (VII: 649* 50, 2, 3*, 4, 67, 9, 70, 2; VIII: 544* 5, 56, 7, 9, 60, 1; E. G.: 445, 6, 7, 8, 9, 50, 1, 2, 66).

Colegiul Naţional „Carol I", Craiova.

Clasa III-a: George M. Nicolae (III: 193*, 4*, 202*, 3*, 4*, 5*, 6, 7, 8; IV: 624; E. G.: 459, 66).

Liceul Militar, Craiova.

Clasa V-a: Cârstea D. Marin (V: 736, 8, 9; VI: 726; E. G.: 439, 41), Popa A. Nicolae (V: 734, 9), Popescu Camil (V: 732).

Clasa VI-a: Andreescu N. Victor (E. G.: 441).

Liceul particular, Craiova.

Clasa VII-a: Ionescu F. Petre (E. G.: 395, 407, 19, 20, 1, 32, 57, 8).

Liceul de Aplicaţie, Iaşi.

Clasa VIII-a: Cubat H. A. (VII: 767, 71; E. G.: 445, 6, 50, 5), Donţu Gh. George (E. G.: 445, 6, 7, 9, 52, 3, 4, 61, 5, 6, 7, 70, 1, 2).

Liceul Internat, Iaşi.

Clasa IV-a: Ionescu I. Andrei (IV: 629), Marta C. Liviu (IV: 623, 4, 34).

Clasa VII-a: Epure M. Ioan (VII: 765, 7, 9, 70, 1).

Liceul Militar, Iaşi.

Clasa III-a: Vlad Mircea (III: 200).

Clasa IV-a: Bârzescu M. (IV: 624, 6, 9, 31, 2, 4; V: 736, 9, 45, 6; E. G.: 465), Ciumaşu Viorel (IV: 626, 31), Ifrim Alex. (IV: 626; E. G.: 453), Nache D. Dumitru (IV: 631; E. G.: 453).

Clasa V-a: VINTILĂ C. (V: 738).

Clasa VI-a: ADRIAN SIMION (E. G.: 445, 6, 7), ANDREI AUREL (VII: 770; VIII: 544, 5; E. G.: 441, 51, 2, 3, 9, 61), ANDREIESCU MIHAI (VIII: 544; E. G.: 446, 7, 53); CAPREIDE I. VALERIU (E. G.: 445, 7, 52), COROIU DAN (E. G.: 447), PETRICAN I. MIHAI (E. G.: 445, 6, 7, 9, 51, 2, 3, 9), POPA N. NECULAI (E. G.: 445, 7, 54, 5), TURCULEȚ TIBERIU (E. G.: 445, 6, 7, 8, 9, 53), VASILIU GH. DUMITRU (VII: 772; E. G.: 445, 6, 7, 8, 9, 51, 2, 3, 4, 5, 9, 61, 6, 70).

Liceul „Sf. Petru și Pavel", Ploești.

Clasa IV-a: CONSTANTINESCU R. D. MIHAI (IV: 624*, 6, 9, V: 736, 9*; E. G.: 466).

Colegiul Național „N. Filipescu", Predeal.

Clasa V-a: COLUMBEANU D. PETRE (E. G.: 452, 3, 7, 8), CORTEA N. ȘT. (V: 738), GHEORGHIU C. (V: 738), MĂNESCU M. (V: 738), OPRIȘ TUDOR (V: 736).

Clasa VI-a: ILIESCU C. CONST. (E. G.: 439, 41, 7, 52, 3), IONESCU B. FL. (E. G.: 445).

Liceul „Enăchiță Văcărescu", Târgoviște.

Clasa VII-a: ALBOTEANU B. VASILE (E. G.: 447).

Liceul „Tudor Vladimirescu", Târgu-Jiu.

Clasa VI-a: GÂȚĂ GH. GHEORGHE (E. G.: 453).

Liceul Militar „Mihai Viteazu", Timișoara.

Clasa IV-a: VRÂNCEANU GH. GHEORGHE (IV: 620, 1, 2, 6; V: 732, 8; E. G.: 442).

Clasa V-a: OPREA NIFON (V: 732, 8, 9), POPESCU M. (V: 732, 6, 8, 9).

Clasa VI-a: CĂPRIȚĂ ION (E. G.: 423, 53).

Liceul „Sf. Haralambie", Turnu-Măgurele.

Clasa VII-a: VASILESCU N. VASILE (VII: 772).

Liceul teoretic de fete, Turnu-Severin.

Clasa VII-a: PLENICEANU P. ILEANA (E. G.: 447).

Liceul „Traian", Turnu-Severin.

Clasa VI-a: DUMITRESCU GH. TRAIAN (VI: 728, E. G.: 445).

EXERCIŢII PROPUSE

Soluţiile exerciţiilor propuse în acest număr se primesc până la 1 Ianuarie 1943

Clasa III-a. *Exerc. 210.* Să se construiască un triunghiu dreptunghic şi isoscel ABC ($\sphericalangle A = 90^0$), dându-se perimetrul său egal cu 7 cm.

V. GH.

III. 211. Care dintre termeni fracţiei $\frac{203}{101}$ este număr prim? Să se transforme fracţia dată în fracţie zecimală şi să se afle a 10001-a cifră zecimală.

V. GH.

III. 212. Fie triunghiul oarecare ABC, iar M mijlocul laturii $\overline{BC}$. Construim cercul cu centrul în M şi cu raza $\overline{MB}$; el taie, a doua oară, laturile AB şi AC respectiv în punctele F şi E. Dreptele BE şi CF se taie în H. Să se arate că, dacă construim cercurile BFH şi CEH, ele taie latura $\overline{BC}$ în acelaşi punct.

O. N. Ţ.

Clasa IV-a. *Exerc. 627*).* Un triunghiu echilateral ABC are perimetrul $3a$. Pe laturile triunghiului ABC luăm punctele A', B', C' astfel că:

$$\frac{\overline{AA'}}{\overline{A'B}} = \frac{3}{4} \; ; \; \frac{\overline{BB'}}{\overline{B'C}} = \frac{3}{4} \; ; \; \frac{\overline{CC'}}{\overline{C'A}} = \frac{3}{4}.$$

Să se calculeze perimetrul triunghiului A'B'C'.

C. I. B.

IV. 636. Pe latura $\overline{BC}$, luată ca diametru, construim cercul (M), care taie, a doua oară, laturile AB şi AC ale triunghiului ABC respectiv în punctele F şi E.

---

*) In numerotarea exerciţiilor din Nr. 8, Vol. VIII primul exerciţiu s'a numerotat 628 în loc de 627. Facem rectificarea aici dând primului exerciţiu Nr. 627, iar celorlalte în continuarea ultimului exerciţiu din Vol. VIII.

Fie H intersecția dreptelor CF, BE.

Cunoscând lungimile segmentelor $\overline{HB}$, $\overline{HC}$, $\overline{HE}$, să se calculeze *perimetrul* și *aria* triunghiului ABC.

O. N. Ț.

IV. 637. Fie triunghiul ABC ($\sphericalangle C > \sphericalangle B$). Prin vârful A ducem o semidreaptă AD, care face cu latura AB un unghiu egal cu diferența unghiurilor C, B și care taie latura BC în punctul D situat între B și C.

Fie M mijlocul lui $\overline{CD}$, iar $\overline{MP}$ perpendiculara dusă din M pe latura AB; ea taie pe AD în N.

Să se calculeze lungimea segmentului $\overline{NP}$.

O. N. Ț.

IV. 638. Fie triunghiul BAC, având unghiul A de 60^0. Pe latura $\overline{BC}$, luată ca diametru, construim cercul (M), care taie, a doua oară, laturile AB și AC respectiv în C′ și B′; fie H intersecția dreptelor BB′ și CC′.

Cunoscând lungimile $\overline{BH} = m$ și $\overline{CH} = n$, să se calculeze *perimetrul* și *aria* triunghiului ABC.

O. N. Ț.

Clasa V-a. *Exerc. 750.* Să se construiască un triunghiu ABC, cunoscând lungimile medianelor $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ ale triunghiului și unghiul ABC.

C. I. B.

V. 751. Să se demonstreze identitatea:

$$(b-c)^3(b+c-a)^3 + b^3(c+a-b)^3 - c^3(a+b-c)^3 \equiv -3bc(b-c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b).$$

I. I. S.

V. 752. Să se descompună în factori expresiile:

$$E_1 \equiv a^2b^2(a^2+b^2) + a^2 + b^2 + 4a^2b^2 - 2ab(a^2+1)(b^2+1)$$

$$E_2 \equiv a^2b^2(a^2+b^2) + a^2 + b^2 + 4a^2b^2 + 2ab(a^2+1)(b^2+1).$$

I. I. S.

V. 753. Să se determine polinomul $P(x, y, z)$ astfel ca să avem:

$$(x+3y)(4y+z)(z+2x)+(x-2z)(4y+3x)(z-y)$$
$$\equiv (xy+yz+zx)\,P(x, y, z).$$

I. I. S.

V. 754. Cercul, care trece prin vârfurile B, C ale triunghiului ABC şi prin I, punctul de întâlnire al bisectoarelor interioare, are ca tangentă în punctul I o dreaptă paralelă cu latura BC.

A. V. N.

Clasa VI-a. *Exerc. 746.* Să se arate că:

a). $\sqrt{8}+\sqrt{5}=\sqrt{13+\sqrt{160}}$

b). $\sqrt{11}+\sqrt{7}=\sqrt{18+\sqrt{308}}$

c). $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{9}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{9}-\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{15+\sqrt{216}}}{\sqrt{7+\sqrt{40}}}$.

A. V. N.

VI. 747. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \dfrac{bz-cy}{a}=\dfrac{cx-az}{b}=\dfrac{ay-bx}{c} \\ mx+ny+pz=d. \end{cases}$$

I. I. S.

VI. 748. Să se rezolve ecuaţia:

$$(a^2+a+1)(b^2+b+1)x^2-[a^4+b^4+2(a^3+b^3)$$
$$+3(a^2+b^2)+2(a+b)+2]x+(a^2+a+1)(b^2+b+1)=0.$$

I. I. S.

VI. 749. Se dă un cerc de rază R. In punctul T se duce tangenta la cerc pe care se ia $\overline{TA} = 3R$. Se ridică $\overline{AL}$ perpendiculară pe AT şi se duce TM care face un unghiu de 60^0 cu TA şi taie cercul a doua oară în N; fie P intersecţia dreptelor AL, TM.

Să se afle perimetrul triunghiului ANP.

C. I. B.

VI. 750. Fiind date două cercuri O_1 şi O_2, să se găsească locul punctelor M din planul lor, din care cele două cercuri sunt văzute sub acelaşi unghiu.

D. S.

VI. 751. Fiind date trei cercuri neegale O_b, O_c, O_d, trecând prin acelaşi punct A al planului, să se arate că există în planul lor un punct M din care cele trei cercuri sunt văzute sub acelaşi unghiu.

D. S.

Clasa VII-a. *Exerc. 655*).* Să se arate că, dacă numerele *a, b, c* sunt în progresie geometrică, avem egalităţile:

1°. $a^3(b+c)(b^2+c^2) = b^3(a+b)(a^2+b^2)$

2°. $(a+c)(b^3+c^3) = (b^2+c^2)(ab+c^2)$.

I. I. S.

VII. 656. Să se stabilească identitatea:

$$\text{cot}\alpha\ \text{cotg}2\alpha - \text{cotg}\alpha\ \text{cotg}3\alpha - \text{cotg}2\alpha\ \text{cotg}3\alpha = 1.$$

I. I. S.

---

*) La numerotarea din volumul precedent s'a trecut din eroare dela Nr. 654, ultimul exerciţiu în Nr. 6, la Nr. 765, primul exerciţiu în Nr. 7. Continuăm cu numerotarea dela Nr. 655 rămânând a nu se mai da ulterior numerele 765—785, care au fost date anul trecut. Când se va ajunge deci la Nr. 764 se va trece direct la 786.

VII. 657. Să se deducă egalitatea:

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}2\alpha}{2(1-\operatorname{tg}^2\alpha)} = \left(\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}2\alpha}{3-\operatorname{tg}^2\alpha}\right)^2.$$

I. I. S.

VII. 658. Să se verifice că, între laturile şi unghiurile unui triunghiu ABC, avem relaţiile:

$$(\Sigma a^3) \cdot (\Sigma \sin^3 A) = (\Sigma a \sin^2 A) \cdot (\Sigma a^2 \sin A)$$

$$(\Sigma a \sin A) \cdot (\Sigma \sin^3 A) = (\Sigma \sin^2 A) \cdot (\Sigma a \sin^2 A).$$

I. I. S.

VII. 659. Să se raţionalizeze numitorul fracţiei:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a^2-b^2}+\sqrt[3]{(a-b)^2}+\sqrt[3]{(a+b)^2}}.$$

I. I. S.

VII. 660. Să se arate că, dacă numerele x, y, z sunt în progresie aritmetică, avem relaţia:

$$(x+2y)(x+2z)(y-z) + (y+2x)(y+2z)(x-z) = 0.$$

In ce caz este adevărată reciproca?

I. I. S.

VII. 661. Ştiind că:

$$\sin x + \cos x = a,$$

să se calculeze $\operatorname{tg}2x$. Discuţie.

V. Gh.

Clasa VIII-a. *Exerc. 564.* Să se stabilească relaţia:

$$(C_m^n A_m^n + P_n)^2 = [(C_m^n)^2 + 1] \cdot [(A_m^n)^2 + (P_n)^2].$$

I. I. S.

VIII. 565. Să se arate, că:

$$\frac{C_m^n \cdot A_m^n}{P} = \left(\frac{C_m^n + A_m^n}{1 + P_n}\right)^2.$$

I. I. S.

VIII. 566. Se consideră funcţia $y = L(\sin x + \cos x)$. Să se arate că:

$$y''' + 2y'y'' = 0,$$

y', y'', y''' fiind derivatele succesive ale lui y în raport cu x.

I. I. S.

VIII. 567. Să se arate, că:

$$\begin{vmatrix} 1 & (a+b)c & c^3 \\ 1 & (b+c)a & a^3 \\ 1 & (c+a)b & b^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a(b^3+c^3) \\ 1 & b & b(c^3+a^3) \\ 1 & c & c(a^3+b^3) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ab & a+b & c^2 \\ bc & b+c & a^2 \\ ca & c+a & b^2 \end{vmatrix} =$$

$$= (\Sigma a^2 + \Sigma ab) \cdot V,$$

unde V este determinantul VANDERMOND de ordinul al III-lea.

A. V. N.

VIII. 568. Să se arate, că:

$$\begin{vmatrix} 1 & ab & (a+b)c \\ 1 & bc & (b+c)a \\ 1 & ca & (c+a)b \end{vmatrix} \equiv 0.$$

A. V. N.

VIII. 569. Să se arate, că

$$\frac{5A_7^4 + A_7^5}{5A_8^4 + A_8^5} = \frac{A_8^5}{A_9^5},$$

A_m^n fiind simbolul aranjamentelor a m obiecte luate câte n. Generalizare.

A. V. N.

VIII. 570. Să se studieze variația funcției:

$$y = \sin^2 x + \sin^2 2x.$$

O. N. Ț.

VIII. 571. Să se studieze variația funcției:

$$y = \sin^4 x + \cos^4 x.$$

O. N. Ț.

Exerciții generale. *Exerc. 472.* Care patrat perfect, mărit cu de 26 ori rădăcina sa patrată, ne dă un alt patrat perfect.

I. I. S.

E. G. 473. Să se găsească două numere de câte patru cifre, știind că ele sunt scrise cu aceleași cifre și că diferă între ele cu 18.

Gh. B.

E. G. 474. Câte soluții în numere întregi are ecuația:

$$x + y = a,$$

a fiind un număr întreg dat.

Gh. B.

E. G. 475. Se cere cifra m și numărul abc, știind că produsul $abc \times m$ este inversul numărului, cba.

Gh. B.

E. G. 476. Să se arate că dacă p este un *număr prim* absolut, avem:

$$(p-1)^{2^4} - 2^{4(p-1)} = \mathcal{M}(17p).$$

I. L.

E. G. 477. Să se arate că, dacă p este un număr prim absolut, atunci:

$$p^4 + 5^{p-1} - 1 = \mathcal{M}(5 \cdot p).$$

I. L.

E. G. 478. Dacă n este numărul divizorilor lui N^p, unde p este un număr prim absolut, atunci

$$n^{p-1} - 1 = \mathcal{M}p.$$

I. L.

E. G. 479. Să se arate că, dacă p este un număr prim absolut, atunci avem:

$$a^{10(p-1)} - (10p)^{10} - 1 = \mathcal{M}(100p).$$

I. L.

E. G. 480. Dacă p este prim absolut, atunci avem:

$$(p-2)!\,(p-1)! + 1 = \mathcal{M}p.$$

I. L.

INSTRUCȚIUNI

a) Soluțiile exercițiilor se vor scrie cu cerneală, pe sferturi de coală și numai pe o parte a foii.

Dacă va fi nevoie de mai multe foi pentru soluționarea unui exercițiu, ele se vor coase sau lipi în partea stângă. Figurile, ce vor fi necesare pentru urmărirea exercițiului se vor construi îngrijit, pe foi aparte, având formatul arătat mai sus și se vor coase sau lipi odată cu soluția.

Nu se vor trimite soluțiile mai multor exerciții pe aceeași foaie.

b) Redactarea soluțiilor se va face astfel:

Sus, se va scrie numărul exercițiului, dedesubt enunțul astfel cum e publicat în revistă, cu inițialele propunătorului, apoi soluția clar compusă, iar la sfârșit, iscălitura rezolvitorului în ordinea următoare:

Numele de botez complet, inițiala părintelui, numele de familie, urmat de clasa și școala pe care o urmează.

c) Nu se vor lua în considerare soluțiile iscălite de 2 sau mai mulți corespondenți, nici soluțiile exercițiilor propuse la clase inferioare aceleia în care corespondentul se află. Pentru redijarea soluțiilor se pot vedea indicațiile din Nr. 1, Vol. IV.

d) Soluțiile se primesc timp de 3 luni dela propunerea exercițiului, numai dela abonații „Suplimentului cu Exerciții" al Gazetei Matematice, pe adresa Casa Gazeta Matematică, Calea Griviței 158, București 2.

Drepturile de reproducere rezervate Societății «Gazeta Matematică».

Elevii claselor VI, VII şi VIII, cu bogată activitate la această revistă îşi pot lărgi cadrul activităţii rezolvând probleme din „Gazeta Matematică".

In Biblioteca „Gazetei Matematice" au apărut şi se găsesc la adresa indicată mai sus, următoarele:

III. **N. Abramescu,** Lecţiuni elementare de Algebră superioară, pentru clasa VIII-a ştiinţifică, Ediţia VII-a . . . . . Lei 200

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** Vocabular Matematic . . . . . Lei 20

X. **G. Ţiţeica,** Culegere de Probleme de Geometrie . . Lei 220

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. Istoric, învăţăminte. Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 300 / pentru abonaţii G. M. şi S. G. M. . Lei 150

XII. **V. Cristescu,** Culegere de Probleme de Trigonometrie. Partea I. (Goniometrie) revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . Lei 140

XIII. **I. Ionescu,** Culegere de Probleme de Aritmetică. Partea I. Aritmetica raţionată . . . . . Lei 250

XIV. **V. Cristescu,** Culegere de Probleme de Trigonometrie. Partea I-a. (Trigonometrie plană). Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 140

XV. **A. G. Ioachimescu,** Culegere de Probleme de Algebră. Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 170

XVI. **G. Ţiţeica,** Culegere de Probleme de Geometrie Analitică. Partea I. Ediţia II-a, adăogită de *N. G. Botea* . . . . . Lei 230

XVII. **A. G. Ioachimescu,** Culegere de Probleme de Algebră. Partea II-a. Ediţia IV-a, revăzută şi mărită . . . . . Lei 350

Biblioteca Istorică a GAZETEI MATEMATICE

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană) tradusă din limba greacă de *V. Marian* . . . . . Lei 250

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile VII—IX de Aritmetică şi Cartea X a Iraţionalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 300

III. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile XI—XIII de Geometrie în spaţiu; Cartea XIV a lui HYPSICLE şi Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 200

Biblioteca Matematică „GEORGE ŢIŢEICA"

I. **Ion Ionescu,** *Maxime şi minime geometrice* . . . . . Lei 160

Suplimentul cu Exerciţii. Abonamentul anual (9 numere) . . . Lei 100

„Gazeta Matematică" apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 300 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimite pe adresa:

Societăţii „GAZETA MATEMATICĂ"

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei No. 158. — Bucureşti 2.

(Telefon: 3-9803).

M. O., IMPRIMERIA NAŢIONALĂ. — C. 82.735

GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCIŢII

ANUL I . No. 2 1 NOEMVRIE 1942

BIBLIOTECA CENTRALĂ ASOCIAŢIUNII SIBIIU

SOCIETATEA GAZETA MATEMATICĂ
CALEA GRIVIŢEI, 158. BUCUREŞTI 2. — TELEFON 3-9803

GAZETA MATEMATICA
SUPLIMENT CU EXERCIŢII

ANUL IX. No. 2 — 1 NOEMVRIE 1942

ABONAMENTUL LEI 100 PE AN (9 numere)

Soluţii şi orice corespondenţă pe adresa:

Casa «Gazeta Matematică», Calea Griviţei 158. — Bucureşti 2

CONCURSUL „GAZETEI MATEMATICE“ DIN 1943

„*Gazeta Matematică*“ va ţine tradiţionalul concurs de matematici la finele vacanţei sărbătorilor Paştelui 1943, înainte de reînceperea cursurilor.

Concursul se va ţine între elevi de liceu de clasele IV, V, VI, VII şi VIII şi studenţi, ai anului I ai Politechnicei din Bucureşti.

Condiţiile concursului şi programele analitice pentru fiecare clasă sunt publicate în Nr. 2 de pe luna Octomvrie 1942 al revistei *Gazeta Matematică*.

La acest concurs se pot înscrie şi abonaţi la *Suplimentul cu exerciţii*, dacă îndeplinesc condiţiile care se cer în *Gazeta Matematică* Nr. 2.

REDACŢIA.

EXERCIŢII REZOLVATE

Clasa III-a. *Exerc. 121. Catetele unui triunghiu dreptunghiu* BAC (*cu unghiul drept în* A) *sunt proporţionale cu numerele 187 şi 84, iar perimetrul triunghiului are ca măsură 42,84 m. Să se calculeze: a) suprafaţa triunghiului* BAC; *b) lungimea cercului* BAC.

O. N. Ţ.

Insemnăm cu a şi b, c măsurile ipotenuzei şi catetelor $\overline{AC}$, $\overline{AB}$. După enunţ vedem că triunghiul BAC este asemenea cu un triunghiu dreptunghiu NMP având catetele $\overline{MN} = 187$, $\overline{MP} = 84$, deci ipotenuzele lor sunt în acelaşi raport, adică:

$$\frac{b}{187} = \frac{c}{84} = \frac{a}{\overline{NP}}.$$

Dar în triunghiul NMP avem:

$$\overline{NP} = \sqrt{187^2 + 84^2} = 205$$

şi:

$$\overline{MP} + \overline{MN} + \overline{NP} = 476,$$

deci aplicând proprietatea că raportul perimetrelor este egal cu raportul de asemănare avem:

$$\frac{a}{205} = \frac{b}{187} = \frac{c}{84} = \frac{42,84}{476}. \qquad (1)$$

Scriind cele trei proporţii distincte formate din (1) cu ultimul raport şi calculând termenul necunoscut avem:

$$a = 2,05 \times 9\,m; \quad b = 1,87 \times 9\,m; \quad c = 0,84 \times 9\,m$$

şi ca urmare:

$$S = 63,6174\,m^2 \; ; \; Lc = 18,45\,\pi m.$$

O. N. Ţ.

III. 202. Fie cercul (O) *de raza r; punctele* A, B, C, D, E, F, *care îl împart în şase părţi egale;* B', E' *respectiv mijloacele arcelor* EF *şi* BC *;* N *şi* R *punctele unde dreapta* CF *taie pe* BB' *şi* EE'. *Să se arate că segmentul* NR *este egal cu diferenţa între latura triunghiului echilateral înscris în cercul* (O) *şi raza acestui cerc.*

O. N. Ţ.

Ducem B'M paralelă cu diametrul CF; ea taie pe E'E în P. Avem $\overline{NR} = \overline{B'P} = \overline{B'M} - \overline{PM}$.

De altă parte, avem:

$$\text{arc } B'E = \text{arc } B'F = \text{arc } MC = \text{arc } BE' = \text{arc } E'C,$$

deci arc ME' = arc CB. Deducem că $\overline{ME'}$ este latura exagonului regulat înscris în cercul (O); asemenea arc B'M = 2 arc BC, deci $\overline{B'M}$ este latura triunghiului echilateral înscris în cercul (O).

Aşa dar, ştiind că $l_6 = r$ şi că $l_3 = r\sqrt{3}$, avem:

$$\boxed{\overline{NR} = r\sqrt{3} - r}.$$

O. N. Ţ.

III. 203. Fie un cerc (O) *de rază r; punctele* A, B, C, D, E, F *care împart cercul în şase părţi egale;* A', B', C', D', E', F' *respectiv mijloacele arcelor* DE, EF, FA, AB, BC, CD; *apoi* M, N, P, Q, R, S *respectiv intersecţiile perechilor de drepte* (AA', OE); (BB', OF); (CC', OA); (DD', OB); (EE', OC); (FF', OD).

Să se arate că exagonul MNPQRS *este un exagon regulat şi să se calculeze latura lui cu aproximaţie* $< 0{,}01$, *când* $r = 1$.

O. N. Ţ.

Fie OI_1 şi OI_2 apotemele coardelor AA', BB'. Coardele AA', BB', întinzând arce egale (căci măs. arc. AFEA' = măs. arc. BAFB' = 150°), sunt egale, deci apotemele lor sunt asemenea egale: $\overline{OI_1} = \overline{OI_2}$.

De altă parte, având:

$$\text{măs. } \overset{\frown}{OMI_1} = \frac{1}{2}(\text{măs. arc. } AB + \text{măs. arc. } A'E) = 45^0$$

şi $$\text{măs. } \overset{\frown}{ONI_2} = \frac{1}{2}(\text{măs. arc. } BC + \text{măs. arc. } B'F) = 45^0,$$

rezultă că: $\sphericalangle OMI_1 = \sphericalangle ONI_2$. Triunghiurile OI_1M şi OI_2N, fiind dreptunghiuri şi având o catetă şi un unghiu ascuţit respectiv egale, sunt egale, deci: $\overline{OM} = \overline{ON}$.

In acelaşi fel găsim, că:

$$\overline{OM} = \overline{ON} = \overline{OP} = \overline{OQ} = \overline{OR} = \overline{OS},$$

ca urmare punctele M, N, P, Q, R, S se găsesc pe un cerc concentric cu cel dat. Observând apoi, că:

$$\sphericalangle MON = \sphericalangle NOP = \sphericalangle POQ = \sphericalangle QOR = \sphericalangle ROM = \sphericalangle AOB,$$

rezultă că:

$$\text{arc } MN = \text{arc } NP = \text{arc } PQ = \text{arc. } QR = \text{arc. } RS = \text{arc } SA,$$

deci exagonul înscris în cercul MNP este un exagon regulat. Diametrul exagonului regulat, $\overline{NR}$, este egal (exerc. III, 202) cu diferenţa între latura triunghiului echilateral înscris în cercul (O) şi raza acestui cerc, adică:

$$\overline{NR} = r\sqrt{3} - r;$$

cum în cazul nostru $r = 1$, avem că $\overline{NR} = \sqrt{3} - 1$.

Latura $\overline{MN}$ fiind egală cu raza cercului MNP, adică $\frac{1}{2}\ \overline{NR}$, avem:

$$\overline{MN} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} = \frac{0{,}732}{2} = 0{,}366$$

cu aproximaţie $< 0{,}001$, deci

$$\overline{MN} = 0{,}37 \text{ cu apr. } < 0{,}01.$$

O. N. Ţ.

Clasa V-a. *Exerc. 740. Să se construiască un triunghiu* ABC, *cunoscând în plan poziţia vârfurilor* B *şi* C *şi punctul* M *de tangenţă al laturii* AB *sau* AC *cu unul din cercurile tritangente triunghiului de construit.*

GH. B.

Fie N punctul de tangenţă al aceluiaşi cerc din enunţ cu latura BC. Se ştie că

$$\overline{BM} = \overline{BN}$$

ca tangente duse dintr'un punct la un cerc. De aici urmează construcţia următoare:

Se ia pe BC o lungime BN egală cu BM. Perpendicularele în M şi N pe BM şi BC se taie în punctul D. Tangenta din C la cercul cu centrul în D şi raza DM determină direcţia laturii CA.

Dacă $BM > BC$ cercul D este exînscris unghiului B.

Dacă BM se ia de la C spre B, cercul D este exînscris unghiului C.

Dacă M este între B şi C, cercul D este cercul înscris.

V. 744. Fie A, B, C, D, E *cinci puncte consecutive, care împart cercul dat* (O) *de rază* R *în cinci părţi egale; fie asemenea* L, M, N, P, Q *respectiv intersecţiile* (AC, BE); (AC, BD); (CE, DB); (CE, DA); (EB, DA). *Să se arate, că:*

1. Poligonul LMNPQ *este regulat.*

2. Însemnând cu l *şi* l_5 *latura acestui poligon şi latura pentagonului regulat convex* ABCDE, *avem:*

$$l = \frac{l_5\ R^2}{4R^2 - l_5^2}.$$

O. N. Ţ.

Trapezele ABCD, BCDE, CDEA, DEAB, EABC fiind isoscele, triunghiurile ALB, BMC, CND, DPE, EQA sunt deasemeni isoscele cu unghiurile dela bază de aceeaşi măsură

$$\left(\frac{1}{10}\text{ măs. cerc.} = 36^0\right);$$

urmează, că având:

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EA},$$

avem şi:

$$\Delta ALB = \Delta BMC = \Delta CND = \Delta DPE = EQA,$$

iar din egalitatea acestor triunghiuri, că:

$$\overline{AL} = \overline{BL} = \overline{BM} = \overline{CM} = \overline{CN} = \overline{DN} = \overline{DP} = \overline{EP} = \overline{EQ} = \overline{AQ}.$$

De altă parte şi coardele, care întind arcele duble egale

$$(ABC = BCD = CDE = DEA = EAB),$$

sunt egale, adică

$$\overline{AC} = \overline{BD} = \overline{CE} = \overline{DA} = \overline{EB}$$

şi ca urmare, avem:

$$\overline{LM} = \overline{AC} - \overline{AL} - \overline{MC} = \overline{AC} - 2\overline{AL};$$

$$\overline{MN} = \overline{BD} - 2\overline{BM} = \overline{AC} - 2\overline{AL} \;;\; \overline{NP} = \overline{CE} - 2\overline{CN} = \overline{AC} - 2\overline{AL};$$

$$\overline{PQ} = \overline{DA} - 2\overline{DP} = \overline{AC} - 2\overline{AL} \;;\; \overline{QL} = \overline{EB} - 2\overline{EQ} = \overline{AC} - 2\overline{AL},$$

deci:

$$\overline{LM} = \overline{MN} = \overline{NP} = \overline{PQ} = \overline{QL}.$$

Aşa dar, poligonul LMNPQ, având laturile egale şi unghiurile egale, este un poligon regulat.

Coarda $\overline{AC}$, fiind paralelă cu DE, avem:

$$\frac{\overline{LM}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BL}}{\overline{BE}}$$

sau

$$\frac{\overline{LM}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AL}}{\overline{AC}}; \qquad (1)$$

dar

$$\overline{AC} = \overline{AL} + \overline{LC} = \overline{AL} + \overline{AB}, \qquad (2)$$

iar

$$\Delta ALB \sim \Delta ABC,$$

deci avem succesiv:

$$\frac{\overline{AL}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \text{ ** } \frac{\overline{AL}}{\overline{AB} - \overline{AL}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC} - \overline{AB}} \text{ ** } \frac{\overline{AL}}{\overline{AB} - \overline{AL}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AL}}, \qquad (3)$$

deci $\overline{AL}$ se obţine împărţind pe $\overline{AB}$ în medie şi extremă raţie, avem ca urmare:

$$\overline{AL} = \frac{\overline{AB}}{2}(-1 + \sqrt{5}) \quad \text{şi} \quad \overline{AC} = \frac{\overline{AB}}{2}(+1 + \sqrt{5}). \qquad (4)$$

Din (1) şi (4) deducem că:

$$l = l_5 \cdot \frac{-1 + \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}},$$

sau raţionalizând numărătorul:

$$l = l_5 \cdot \frac{1}{\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2}.$$

Dacă însemnăm cu l'_{10} latura decagonului stelat, avem:

$$l'_{10} = R\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right),$$

deci

$$l = \frac{l_5 R^2}{l'^2_{10}},$$

şi cum

$$l'^2_{10} = 4R^2 - l_5^2,$$

rezultă relaţia cerută în enunţ:

$$\boxed{l = \frac{l_5 R^2}{4R^2 - l_5^2}}.$$

O. N. Ţ.

Exerciţii generale. *E. G. 438. Dacă trei numere, care nu sunt cuburi perfecte, înmulţite între ele dau un produs cub perfect, acele numere nu pot fi coprime.*

I. L.

Două numere sunt coprime dacă nu au niciun divizor comun. Fie cele trei numere ale noastre A, B, C

$$A \times B \times C = M^3$$

$$A = a_1 . a_2 . a_3 \ldots a_n$$

$$B = b_1\ b_2\ b_3 \ldots b_m$$

$$C = c_1\ c_2\ c_3 \ldots c_e$$

$$A \neq n_1^3$$

$$B \neq n_2^3$$

$$C \neq n_3^3$$

$$A \times B \times C = a_1 \times a_2 \times a_3 \times \ldots \times a_n \times b_1 \times b_2 \times b_3 \ldots$$

$$\ldots b_m \times c_1 \times c_2 \times c_3 \times \ldots c_e = M^3 = m_1^3 \times m_2^3 \times \ldots m_i^3.$$

$$A \times B \times C = m_1^3 \times m_2^3 \times \ldots m_i^3 = a_1 \times a_2 \times \ldots a_n \times b_1 \times b_2 \ldots$$

$$\ldots b_m \times c_1 - c_2 \ldots c_i.$$

$$m_1^3 \times m_2^3 \times m_3^3 \times \ldots m_1^3 = a_1 \times a_2 \times a_3 \ldots a_n \times b_1 \times b_2 \ldots$$

$$\ldots b_m \times c_1 - c_2 \ldots c_i.$$

m_1^3 trebuie să provină prin înmulţirea a trei factori $(m_1 \times m_2 \times m_3)$; de asemenea şi m_2^3, $m_3^3 \ldots m_i^3$.

Cei trei factori, la o parte din aceşti termeni, se pot găsi între factorii unui număr, însă ceilalţi rămaşi m_{i-3}^3, m_{i-2}^3, m_{i-1}^3, m_i^3 nu pot proveni decât din factori dela numere diferite. Aceasta numai în cazul când A, B, C nu sunt cuburi perfecte.

In acest caz deci, produsul a celor trei numere fiind un cub perfect, numerele A, B, C nu pot fi coprime.

E. G. 439. Care este codivizorul maxim al numerelor 18951941 şi 19411895.

I. L.

Codivizorul maxim a două numere îl aflăm prin metoda resturilor, căutând divizorii resturilor obţinuţi prin împărţiri succesive, operaţie care se mai numeşte şi algoritmul lui EUCLID.

	1	41	4	1
19411895	18951941	459954	93827	84646
= = 459954	= = 553781	= 84646	= 9181	= 1017
	= 93827			

	9	9	36	3	9
9181	1017	28	9	1	
= = 28	= 177	= 1	91		
	= = 9		=		

Ultimul rest este 1, deci acesta este singurul divizor comun. Numerele date sunt deci coprime, neadmiţând niciun divizor comun afară de 1.

E. G. 440. Dacă patru numere nu se divid cu un număr dat, suma lor se poate divide cu acel număr?

Să se dea câteva exemple pentru numerele de o cifră.

I. L.

Fie a, b, c, d, cele patru numere şi n, numărul prin care le dividem. Din text rezultă.

$$+\begin{cases} a = Mn + r_1 \\ b = Mn + r_2 \\ c = Mn + r_3 \\ d = Mn + r_4 \end{cases}$$

Se întreabă dacă este posibil ca:

$$\frac{a+b+c+d}{n} = M.$$

$$a+b+c+d = Mn + r_1 + r_2 + r_3 + r_4$$

$$a+b+c+d-(r_1+r_2+r_3+r_4) = Mn; \qquad r_1+r_2+r_3+r_4 = Mn.$$

$$\frac{a+b+c+d}{n} - \frac{r_1+r_2+r_3+r_4}{n} = M.$$

Deci suma a patru numere nedivizibile cu un număr dat, este divizibilă cu acel număr, atunci când suma numerelor rezultate ca rest în urma împărţirii numerelor date cu împărţitorul, este multiplu al împărţitorului.

E. G. 441. Care este comultiplul minim al numerelor: 1895 *şi* 1941 ?

I. L.

Comultiplul minim a două numere *a, b,* este dat de relaţia:

$$C = \frac{a \cdot b}{D}$$

unde D este codivizorul maxim.

Rămâne deci să aflăm codivizorul maxim al acestor două numere.

Le descompunem în factori şi avem

$$1895 = 5 \cdot 379 \quad ; \quad 1941 = 3 \cdot 647.$$

Vedem deci că numerele 1895 şi 1941 nu admit niciun divizor comun afară de 1, deci comultiplul minim al acestor numere este produsul lor:

$$C = 1895 \cdot 1941 = 3678195.$$

Intre numere coprime, cazul de faţă, comultiplul minim este egal cu produsul numerelor date.

E. G. 442. Anul naşterii şi anul morţii unei persoane sunt scrise cu aceleaşi cifre. Ştiind că vârsta acelei persoane nu a depăşit o sută de ani, ce vârstă minimă şi ce vârstă maximă ar fi avut acea persoană?

I. L.

Anul naşterii unei persoane fie exprimat algebric *abcd*. Anul morţii este scris cu aceleaşi cifre altfel aşezate; ex.: *abdc*, *adbc*, etc....

Diferenţa dintre aceste două numere este vârsta persoanei respective:

abcd, anul naşterii, *abdc*, anul morţii

$$abdc - abcd = 1000a + 100b + 10d + c - 1000a - 100b -$$

$$- 10c - d = 9\ (d - c) < 100.$$

Cea mai mică valoare a acestei expresii poate fi nouă.

$$d - c = 1 \quad d = c + 1.$$

Această vârstă este vârsta minimă, căci prin oricare altă aşezare a cifrelor din anul morţii diferenţa faţă de anul naşterii, este mai mare decât 9, dacă nu este 0, ceea ce nu admite problema.

Pentru a afla vârsta maximă a persoanei trebuie să permutăm şi cifra sutelor căci permutând numai a zecilor obţinem diferenţa, vârsta maximă de 72 ani, care e depăşită de altă relaţie.

$$- abcd + adbc = - 1000a - 100b - 10c - d + 1000a + 100d +$$

$$+ 10b + c = 99d - 90b - 9c = 9\ (11d - 10b - c)$$

$$9\ (11d - 10b - c) < 100 \qquad \{\text{ex.: } -1112 + 1211 = 99$$

când $11d - 10b - c = 11$, vârsta persoanei este de 99 ani. Relaţia aceasta e posibilă.

$$d = 2, \quad b = 1, \quad c = 1, \quad 22 - 10 - 1 = 11.$$

Deci vârsta maximă este 99, iar cea minimă 9.

E. G. 444. Să se găsească un număr sau forma lui generală astfel ca față de divizorii 12, 15, 21 să dea respectiv resturile 3, 12, 6).*

O. N. Ţ.

Observăm dela început că numărul N_1 căutat este un M3, deoarece divizorii şi resturile respective sunt M3. Vom pune deci $N_1 = 3N$ şi vom avea:

$$3N = 12m + 3 = 15n + 12 = 21p + 6 \qquad (1)$$

sau încă:

$$N = 4m + 1 = 5n + 4 = 7p + 2. \qquad (2)$$

Numerele întregi trebuie să fie alese astfel ca:

$$4m - 7p = +1 \;\; ; \;\; 4m - 5n = +3. \qquad (3)$$

Pentru prima ecuaţie avem soluţia particulară:

$$m_0 = 2, \; p_0 = 1,$$

deci soluţia generală:

$$m = 2 + 7t \;\; ; \;\; p = 1 + 4t, \qquad (4)$$

pentru care a doua ecuaţie devine:

$$28t - 5n = -5, \qquad (5)$$

deci

$$t = 5\theta, \qquad (6)$$

şi ca urmare:

$$28\theta - n = -1. \qquad (7)$$

Ecuaţia (7) are soluţia particulară evidentă:

$$\theta_0 = 1, \; n_0 = 29,$$

deci soluţia generală:

$$\theta = 1 + \eta \;\; ; \;\; n = 29 + 28\eta; \qquad (8)$$

deducem:

$$t = 5 + 5\eta \;\; ; \;\; m = 37 + 35\eta,$$

deci:

$$\boxed{N = 140\eta + 149},$$

care dă soluţia cerută.

---

*) **Enunţ corectat.**

O. N. Ţ.

Până la 1 Octomvrie 1942 s'au primit soluții bune la exercițiile publicate în numărul 1 al anului al IX-lea*):

Liceul „Dr. Ioan Meşotă", Braşov.

Clasa VIII-a: Florică St. (VIII: 568).

Liceul de fete „Carmen-Sylva", Bucureşti.

Clasa VII-a: Damian C. Lucia (VII: 655, 6, 7); Stoicescu Viorica (VIII: 568).

Clasa VIII-a: Damian C. Cornelia (VIII: 564, 5, 6, 7, 8, 9).

Liceul „Ştirbei-Vodă", Călăraşi.

Clasa VIII-a: Ionescu C. Victor (VIII: 564, 5, 6, 7, 8, 9, 70, 1).

Liceul „Traian Doda", Caransebeş.

Clasa VIII-a: Curcă M. Ioan (VIII: 564, 5).

Liceul „Alecu Russo", Chişinău.

Clasa VIII-a: Bossie V. Boris (VIII: 564, 5, 6, 7, 8, 9).

Liceul „Oltea Doamna", Iaşi.

Clasa IV-a: Albu D. Aurelia (IV: 629, 31, 2, 4, 5).

Liceul „Tudor Vladimirescu", Târgu-Jiu.

Clasa VII-a: Gâță Gh. Gh. (VII: 655, 6, 7; E. G.: 473).

EXERCIȚII PROPUSE

Soluțiile exercițiilor propuse în acest număr se primesc până la 1 Februarie 1943

Clasa III-a. *Exerc. 213.* Care sunt patratele perfecte imediat superioare numerelor

65432 şi 654321?

Câte patrate perfecte există între aceste numere?

A. V. N.

*) **Numărul unui exercițiu foarte bine rezolvat şi îngrijit redijat este însoțit de un asteric.**

III. 214. Cu ce numere trebuie măriţi termenii fracţiei

$$\frac{9135}{60336}$$

ca să obţinem patratul unei alte fracţii?

Să se găsească cele mai mici numere care satisfac acestei probleme.

Aceeaşi problemă pentru fracţia ireductibilă a fracţiei date.

A. V. N.

III. 215. Să se arate că produsul

$$672 \times 1050$$

este un patrat perfect, fără a extrage rădăcina patrată.

A. V. N.

Clasa IV-a. *Exerc. 639.* Să se înmulţească polinomul:

$$(3 - 2y - 2y^2)\, x^3 + (5y - 3y^2)\, x^2 + (1 - 7y)\, x$$

cu polinomul:

$$(6 + 3y)\, x^2 - (2 + y)\, x.$$

V. Gh.

IV. 640. Punând:

$$V = x + 1 \;;\; U = xV + 3 \;;\; T = xU - 5 \;;\; S = xT - 7;$$

$$R = x \,.\, S + 9 \;;\; P = xR + 11,$$

să se arate P este un polinom în x de gradul al 6-lea şi să se găsească expresia lui pe calea cea mai scurtă.

Să se găsească valoarea numerică a polinomului P pentru $x = 999$, folosind calculul cel mai simplu.

O. N. Ţ.

IV. 641. Fie, în spaţiu, două drepte D şi D', neaşezate în acelaşi plan; A şi B două puncte fixe respectiv pe dreptele D şi D'. Fie M un punct oarecare pe dreapta D şi N un punct oarecare pe dreapta D'.

Să se arate că, dacă punctul M nu coincide cu punctul A, sau N cu punctul B, dreptele AB şi MN nici nu se întâlnesc, nici nu sunt paralele.

O. N. Ţ.

IV. 642. Să se calculeze produsul:

$$(x^2+x+1)^3 \cdot (x^2-x+1)^3 \cdot (x^4-x^2+1)^3 \cdot (x^8-x^4+1)^3 \cdot$$
$$\cdot (x^{16}-x^8+1)^3,$$

pe calea cea mai scurtă.

Să se dea forma generală a acestui produs şi să se găsească valoarea lui numerică pentru $x = -1$.

O. N. Ţ.

Clasa V-a. *Exerc. 755.* Să se stabilească identitatea:

$$(a+2b-3c)^3+(b+2c-3a)^3+(c+2a-3b)^3 \equiv$$
$$\equiv 3(a+2b-3c)(b+2c-3a)(c+2a-3b).$$

I. I. S.

V. 756. Să se descompună în factori expresia:

$$E \equiv (x+2y+3z)^3+(2x+3y+4z)^3-(3x+5y+7z)^3.$$

I. I. S.

V. 757. In unghiul XOY se înscrie unghiul X'OY' egal cu jumătate din XOY. Să se arate, că simetrica OX" a lui OX faţă de OX' este în acelaşi timp simetrica lui OY faţă de OY'.

GH. B.

V. 758. La cercul dat O se duce tangenta DD' paralelă cu un diametru AB. Fie C un punct pe AB şi E intersecţia lui DD' cu tangenta dusă din C la cercul O.

Să se demonstreze, că triunghiul OCE este isoscel.

GH. B.

V. 759. Se dă un cerc şi patru puncte A, B, C, D pe el. Perpendiculara ridicată în A pe AC şi perpendiculara ridicată în C pe AC taie pe BD în A', C'. Fie M intersecţia coardelor AC, BD, E, F mijloacele segmentelor C'M, MA'.

Să se arate că:

$$\overline{A'C'} = 2(\overline{AF}+\overline{CE}).$$

C. I. B.

Clasa VI-a. *Exerc. 752.* Ştiind că x', x'' sunt rădăcinile ecuaţiei:

$$x^2 + px + q = 0,$$

să se formeze şi să se discute ecuaţia care are ca rădăcină pe:

$$x_1 = x'(1 - x'') \quad \text{şi} \quad x_2 = x''(1 - x').$$

GH. B.

VI. 753. Să se simplifice expresia iraţională:

$$E \equiv \sqrt{N - 6a\sqrt{N - 6a\sqrt{N - \cdots - 6a\sqrt{N - 6a\sqrt{M + 6a\sqrt{a+1}}}}}},$$

unde $M = 9a^2 + a + 1$ şi $N = 27a^2 + a + 1$.

Să se arate că valoarea expresiei E nu depinde de *numărul* radicalilor suprapuşi penultimului radical ci de *paritatea* acestui număr.

O. N. Ţ.

VI. 754. Să se formeze ecuaţia bipatrată, care să aibă rădăcinile în progresie aritmetică.

Este vreo ecuaţie bipatrată, care să aibă rădăcinile în progresie geometrică, reale şi distincte?

O. N. Ţ.

VI. 755. Fie D şi Δ două drepte în spaţiu, cu direcţiile perpendiculare una pe alta, neaşezate în acelaşi plan; A şi B punctele unde perpendiculara comună se sprijină respectiv pe D şi Δ; M şi N două puncte respectiv pe D şi Δ astfel ca $\overline{AM} = m$, $\overline{BN} = n$. Ştiind că $\overline{AB} = d$, să se calculeze *aria totală* şi *volumul* tetraedrului MABN. Să se calculeze apoi proiecţia *ab* a segmentului $\overline{AB}$ pe dreapta MN şi să se deducă că punctele *a* şi *b* nu pot fi niciodată confundate.

O. N. Ţ.

VI. 756. Să se demonstreze identitatea:

$$(\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x)^2 = (1 + \operatorname{tg}^2 x) + (1 + \operatorname{cotg}^2 x) = (1 + \operatorname{tg}^2 x)(1 + \operatorname{cot}^2 x)$$

V. GH.

VI. 757. Să se afle valoarea expresiei:

$$E \equiv \frac{x-1}{x+1} + \frac{y-1}{y+1} + \frac{z-1}{z+1}$$

pentru

$$x = \frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad y = \frac{1+\sin\beta}{\cos\beta}, \quad z = \frac{1+\sin\gamma}{\cos\gamma}.$$

I. I. S.

Clasa VII-a. *Exerc. 662.* Să se calculeze determinantul:

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ y^2 & y & 1 \\ x & y & xy \end{vmatrix}$$

punând rezultatul sub formă de produs.

I. I. S.

VII. 663. Să se calculeze determinantul:

$$D_4 \equiv \begin{vmatrix} 1 & 2^2 & 3 & 4^2 \\ 5 & 6^2 & 7 & 8^2 \\ 9 & 10^2 & 11 & 12^2 \\ 13 & 14^2 & 15 & 16^2 \end{vmatrix}$$

şi să se generalizeze.

V. Gh.

VII. 664. Să se afle valoarea fracţiei:

$$F = \frac{a(x^2-1) - x(a^2-1)}{a(x-1)^2 - x(a-1)^2}$$

pentru $x = a$.

I. I. S.

VII. 665. Să se stabilească relaţia:

$$(C_n^m - 1)(A_n^m + P_m) = (C_n^m + 1)(A_n^m - P_n),$$

unde A_n^m, P_m, C_n^m înseamnă numărul aranjărilor, numărul permutărilor şi numărul combinărilor.

I. I. S.

VII. 666. Să se afle valoarea fracţiei:

$$F = \frac{b(x^2 - a^2) + (a^2 - b^2)x + a(b^2 - x^2)}{c(x^2 - a^2) + (a^2 - c^2)x + a(c^2 - x^2)}$$

pentru $x = a$.

I. I. S.

VII. 667. Să se calculeze determinantul:

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} \frac{a-1}{a+1} & \frac{a}{a^2-1} & \frac{a+1}{a-1} \\ \frac{b-1}{b+1} & \frac{b}{b^2-1} & \frac{b+1}{b-1} \\ \frac{c-1}{c+1} & \frac{c}{c^2-1} & \frac{c+1}{c-1} \end{vmatrix}.$$

I. I. S.

VII. 668. Să se verifice identitatea:

$$\begin{vmatrix} \sin x & \sin 2x & \sin 3x \\ \sin 3x & \sin 4x & \sin 5x \\ \sin 5x & \sin 6x & \sin 7x \end{vmatrix} = 0.$$

Generalizare.

O. N. Ţ.

Clasa VIII-a. *Exerc. 572.* Se prelungeşte latura BC a triunghiului echilateral ABC cu lungimea $\overline{CD} = \overline{BC}$. Prin D să se ducă o secantă Δ care să taie pe AB şi AC în E şi F, astfel încât suprafeţele ABC, AEF şi BEFC să fie în progresie aritmetică.

Gh. B.

VIII. 573. Un dreptunghiu OABC se deformează păstrând vârful O şi direcţia laturei OA fixe, iar perimetrul său constant. Care este locul punctului de întâlnire al diagonalelor?

Să se dea şi o soluţie prin geometria elementară pură.

O. N. Ţ.

VIII. 574. Un trapez ABCD ($\overline{AB}$ baza mare) de perimetru constant se deformează păstrând vârful A şi direcţiile laturilor AB şi AD fixe. Ştiind că unghiul A este de 60^0, să se găsească locul vârfului C.

Să se dea şi o soluţie prin geometria elementară pură.

O. N. Ţ.

VIII. 575. Pe o semidreaptă OX se iau punctele M, N, A astfel ca $\overline{OM} = \overline{MN} = \overline{NA} = \lambda$. Pe $\overline{ON}$ şi $\overline{MA}$ ca diametre se construiesc cercurile (I_1) şi (I_2), care se taie în punctele P şi P'.

Se cere, când λ variază, să se găsească locul punctelor P şi P'.

Să se dea şi o soluţie prin geometria elementară pură.

O. N. Ţ.

VIII. 576. Se cere locul geometric al centrului cercului

$$x^2 + y^2 - (1 + \cos\alpha)\, x + (1 + \sin\alpha)\, y - 1 = 0,$$

când α variază.

C. I. B.

VIII. 577. Fie $A_1A_2A_3 \ldots A_{n-1}A_n$ un poligon regulat având n laturi. Notând cu $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_{n-1}, m_n$ coeficienţii unghiulari ai dreptelor (A_1A_2), $(A_2A_3), \ldots, (A_{n-1}A_n)$, (A_nA_1), se cere să se demonstreze relaţia:

$$(1) \qquad m_1m_2 + m_2m_3 + \ldots + m_{n-1}m_n + m_nm_1 = -n.$$

Considerăm patratul $A_1A_2A_3A_4$, având laturile paralele cu axele de coordonate. Să se demonstreze că relaţia (1) este adevărată şi pentru acest caz particular, în care membrul I apare sub formă nedeterminată.

Gh. D.

VIII. 578. Fie un unghiu drept *xoy*. Pe OX şi OY luăm respectiv punctele fixe A, B, apoi pe aceleaşi semidrepte luăm respectiv punctele variabile M, N. Notăm cu P punctul de intersecţie al dreptelor BM, AN şi apoi cu α şi β respectiv mijloacele dreptelor OP, MN.

Să se demonstreze că dreapta $\alpha\beta$ trece printr'un punct fix.

Gh. D.

VIII. 579. Fie un unghiu drept *xoy*; un cerc (C) variabil şi tangent axelor OX, OY respectiv în M, N; apoi MNPQ dreptunghiul înscris în cercul (C).

1°. Să se găsească locurile mijloacelor laturilor $\overline{MQ}$, $\overline{NP}$.

2°. Locul mijlocului arcului $\overset{\frown}{MQ}$. Să se dea şi o soluţie pur geometrică.

O. N. Ţ.

Exerciţii generale. *Exerc. 481.* Să se arată că:

$$30!\ 66! = \mathcal{M}97 - 1$$

$$31!\ 65! = \mathcal{M}97 + 1.$$

I. L.

E. G. 482. Să se arate că, dacă p este un număr prim absolut, atunci avem:

$$(p-1)! + (p+1)^{p-1} = \mathcal{M}p.$$

I. L.

E. G. 483. Să se arate că, dacă p este un număr prim absolut, atunci:

$$\frac{\left(\frac{p-1}{2}+1\right)\left(\frac{p-1}{2}+2\right)\ldots(p-1)}{\left(\frac{p-1}{2}\right)!} = \mathcal{M}p \pm 1.$$

I. L.

E. G. 484. Să se arate că:

$$20!\ 21! \pm 1 = \mathcal{M}41.$$

I. L.

E. G. 485. Dacă p este un număr prim absolut, atunci avem:

$$1^{p-1} + 2^{p-1} + \ldots + (p-1)^{p-1} = \mathcal{M}p + 1.$$

I. L.

E. G. 486. Dacă p este un număr prim absolut, mai mare ca 2, atunci:

$$(p-2)! + (p-1)! = \mathcal{M}p.$$

I. L.

E. G. 487. Să se arate că dacă p este prim absolut şi mai mare ca 2, atunci:

$$1!\,(p-2)!+2!\,(p-3)!+\ldots+\left[\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right]^2=\mathcal{M}p+1.$$

I. L.

E. G. 488. Să se arate, că

$$[\varphi(n)!-1]^{\varphi(n)}-1=\mathcal{M}n!$$

unde $\varphi(n)$ este indicatorul lui n.

I. L.

E. G. 489. Să se arate că dacă $\sigma(a)$ reprezintă suma numerelor prime cu a şi mai mici ca el, şi dacă p este prim absolut şi prim cu a, atunci:

$$\sigma(a^p)-\sigma(a)=\mathcal{M}p.$$

I. L.

INSTRUCŢIUNI

a) Soluţiile exerciţiilor se vor scrie cu cerneală, pe sferturi de coală şi numai pe o parte a foii.

Dacă va fi nevoie de mai multe foi pentru soluţionarea unui exerciţiu, ele se vor coase sau lipi în partea stângă. Figurile, ce vor fi necesare pentru urmărirea exerciţiului se vor construi îngrijit, pe foi aparte, având formatul arătat mai sus şi se vor coase sau lipi odată cu soluţia.

Nu se vor trimite soluţiile mai multor exerciţii pe aceeaşi foaie.

b) Redactarea soluţiilor se va face astfel:

Sus, se va scrie numărul exerciţiului, dedesubt enunţul astfel cum e publicat în revistă, cu iniţialele propunătorului, apoi soluţia clar compusă, iar la sfârşit, iscălitura rezolvitorului în ordinea următoare:

Numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie, urmat de clasa şi şcoala pe care o urmează.

c) Nu se vor lua în considerare soluţiile iscălite de 2 sau mai mulţi corespondenţi, nici soluţiile exerciţiilor propuse la clase inferioare aceleia în care corespondentul se află. Pentru redijarea soluţiilor se pot vedea indicaţiile din Nr. 1, Vol. IV.

d) Soluţiile se primesc timp de 3 luni dela propunerea exerciţiului, numai dela abonaţii „Suplimentului cu Exerciţii" al Gazetei Matematice, pe adresa Casa Gazeta Matematică, Calea Griviţei 158, Bucureşti 2.

Drepturile de reproducere rezervate Societăţii «Gazeta Matematică».

Elevii claselor VI, VII şi VIII, cu bogată activitate la această revistă îşi pot lărgi cadrul activităţii rezolvând probleme din „Gazeta Matematică".

In Biblioteca „Gazetei Matematice" au apărut şi se găsesc la adresa indicată mai sus, următoarele:

III. **N. Abramescu,** Lecţiuni elementare de Algebră superioară, pentru clasa VIII-a ştiinţifică, Ediţia VII-a . . . . . Lei 200

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** Vocabular Matematic . . . . . .Lei 20

VII. **Gh. Lazăr,** *Trigonometrie drept liniară* (după cursul predat de **Gh. Lazăr** la colegiul Sf. Sava) . . . . . .Lei 10

X. **G. Ţiţeica,** Culegere de Probleme de Geometrie . . . .Lei 220

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. Istoric, învăţăminte. Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 300 / pentru abonaţii G. M. şi S. G. M. . Lei 150

XII. **V. Cristescu,** Culegere de Probleme de Trigonometrie. Partea I. (Goniometrie) revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . .Lei 140

XIII. **I. Ionescu,** Culegere de Probleme de Aritmetică. Partea I. Aritmetica raţionată . . . . . .Lei 250

XIV. **V. Cristescu,** Culegere de Probleme de Trigonometrie. Partea I-a. (Trigonometrie plană). Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . .Lei 140

XV. **A. G. Ioachimescu,** Culegere de Probleme de Algebră. Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . .Lei 170

XVI. **G. Ţiţeica,** Culegere de Probleme de Geometrie Analitică. Partea I. Ediţia II-a, adăogită de *N. G. Botea* . . . . . .Lei 230

XVII. **A. G. Ioachimescu,** Culegere de Probleme de Algebră. Partea II-a. Ediţia IV-a, revăzută şi mărită . . . . . .Lei 350

Biblioteca Istorică a GAZETEI MATEMATICE

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană) tradusă din limba greacă de *V. Marian* . . . . . .Lei 250

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile VII-IX de Aritmetică şi Cartea X a Iraţionalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . Lei 300

III. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile XI—XIII de Geometrie în spaţiu; Cartea XIV a lui HYPSICLE şi Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 200

Biblioteca Matematică „GEORGE ŢIŢEICA"

I. **Ion Ionescu,** *Maxime şi minime geometrice* . . . . . Lei 160

Suplimentul cu Exerciţii. Abonamentul anual (9 numere) . Lei 100

„Gazeta Matematică" apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 300 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimite pe adresa:

Societăţii „GAZETA MATEMATICĂ"

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei No. 158. — Bucureşti 2.

(Telefon: 3-9803).

M. O., IMPRIMERIA NAŢIONALĂ. — C. 83.233

GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCIŢII

ANUL IX. No. 3 1 DECEMVRIE 1942

SOCIETATEA GAZETA MATEMATICĂ
CALEA GRIVIŢEI, 168. BUCUREŞTI 2. — TELEFON 3-9803

GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCIŢII

ANUL IX. No. 3 — 1 DECEMVRIE 1942

ABONAMENTUL LEI 100 PE AN (9 numere)

Soluţii şi orice corespondenţă pe adresa:

Casa «Gazeta Matematică», Calea Griviţei 158. — Bucureşti 2

CONCURS DE MECANICĂ

In urma rezultatului îmbucurător al Concursului de Mecanică de anul trecut, se instituie şi în anul acesta de către *Suplimentul cu exerciţii al Gazetei Matematice* un Concurs de Mecanică în lunile Februarie, Martie şi Aprilie 1943.

Condiţiile de participare sunt:

1. Candidaţii vor fi elevi de liceu, corespondenţi la *Suplimentul cu exerciţii al Gazetei Matematice.*

2. Soluţiile problemelor propuse în lunile de mai sus, vor fi trimise la Soc. *Gazeta Matematică*, până cel mai târziu 15 Mai 1943.

Premiile ce se oferă sunt:

Premiul I în valoare de lei 2000 (două mii).

„ II „ „ „ „ 1000 (una mie).

Rezultatele se vor publica în numărul din Iunie al Suplimentului.

EXERCIŢII REZOLVATE

Clasa IV-a. *Exerc. 629. Un con circular drept* (S), *înscris într'o sferă dată* (O), *taie planul tangent la sferă şi paralel cu baza lui după un cerc* (A) *egal cu un cerc mare al sferei* (O). *Să se calculeze măsurile exacte:*

a) *Suprafaţa laterală şi volumul conului* (S);

b) *Suprafaţa laterală şi volumul trunchiului de con* (T), *cuprins între conul* (S) *şi planul tangent considerat;*

c) *Aria calotei sferei* (O) *cuprinsă în trunchiul de con* (T).

O. N. Ţ.

Considerăm secţia făcută în con şi sferă prin un plan trecând prin vârful conului şi centrul sferei. Fie $\overline{MN}$ diametrul de bază al conului (S) înscris în sferă, I centrul acestui cerc; $\overline{BC}$ diametrul cercului (A), tăiat de conul prelungit pe planul tangent în A, paralel cu planul de bază al conului (S).

Pentru calculul suprafeţelor şi volumelor cerute, este necesar să cunoaştem: raza $\overline{IM} = r$, înălţimea $\overline{SI}$, generatoarea $\overline{SM}$; apoi generatoarea $\overline{MB}$ a trunchiului de con (T), celelalte rezultând din acestea.

Observăm în primul rând că

$$\overline{OI} = \sqrt{R^2 - r^2}; \qquad (1)$$

apoi

$$\overline{OI} = \overline{IS} - \overline{OS},$$

însă

$$\Delta SIN \sim \Delta SAC,$$

deci

$$\frac{\overline{SI}}{\overline{IN}} = \frac{\overline{SA}}{\overline{AC}} \quad \text{sau} \quad \frac{\overline{SI}}{r} = \frac{2R}{R},$$

de unde:

$$\overline{SI} = 2r,$$

deci

$$\overline{OI} = 2r - R. \qquad (2)$$

Cele două valori (1) şi (2) ale lui $\overline{OI}$ fiind egale, patratele lor sunt de asemenea egale, adică:

$$R^2 - r^2 = 4r^2 + R^2 - 4Rr$$

sau

$$\boxed{5r^2 - 4Rr = 0} \qquad (3)$$

sau încă: $r\,(5r - 4R) = 0$ şi cum $r \neq 0$, urmează că el este dat de ecuaţia: $5r - 4R = 0$, adică:

$$\boxed{r = \frac{4R}{5}}.$$

Avem imediat:

$$\overline{OI} = \frac{8R}{5} - R = \frac{3R}{4} \quad ; \quad \overline{SI} = \frac{8R}{5};$$

din care deducem:

$$\overline{SN} = \sqrt{\overline{SI}^2 + \overline{IN}^2} = \frac{4R}{5}\sqrt{5},$$

deci:

$$S_l \text{ Con (S)} = \frac{16\sqrt{5}}{25} \cdot \pi R^2 \quad ; \quad \text{Vol. Con (S)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{64}{125} \cdot \pi R^3.$$

Pentru trunchiul de con (T) observăm încă, că:

$$\overline{IA} = \overline{SA} - \overline{SI} = 2R - \frac{8R}{5} = \frac{2R}{5} \quad ; \quad \overline{SC} = \sqrt{\overline{SA}^2 + \overline{AC}^2} = R\sqrt{5}$$

$$\overline{NC} = \overline{SC} - \overline{SN} = R\sqrt{5} - \frac{4R\sqrt{5}}{5} = \frac{R\sqrt{5}}{5};$$

ca urmare:

$$S_l\,(T) = \pi\,(\overline{IN} + \overline{AC})\,\overline{NC} = \frac{9\sqrt{5}}{25} \cdot \pi R^2;$$

$$V\,(T) = \frac{\pi}{3} \cdot \overline{IA}\,(\overline{IN}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{IN} \cdot \overline{AC}) = \frac{122}{125} \cdot \frac{\pi R^3}{3};$$

Supr. calotei $MAN = \frac{4}{5}\pi R^2$.

O. N. Ţ.

IV. 631. Fie ABCD *un trapez isoscel circumscris unui cerc* (O) *de rază 1. Semidiferenţa bazelor* $\overline{AD}$ *şi* $\overline{BC}$ *este cât* $\frac{5}{6}$ *din raza cercului* (O).

Se taie din trapez triunghiurile AOD *şi* BOC, *iar aria rămasă se roteşte în jurul axei* BC.

Să se calculeze aria solidului astfel înnăscut.

O. N. Ţ.

Avem două cazuri de considerat, după cum $\overline{BC}$ este socotită *baza mare* sau *baza mică.*

a) *Fie cazul:* $\overline{BC}$ *baza mare a trapezului.*

Dacă I şi H sunt punctele unde baza mică şi baza mare sunt respectiv tangente cercului (O), solidul înnăscut de aria rămasă, (AOB + DOC), este simetric în raport cu planul trecând prin $\overline{IH}$ perpendicular pe BC; deci aria A a solidului înăscut (S) este îndoitul ariei A_1 a solidului înnăscut din rotirea ariei AOB în jurul axei BC, adică:

$$A = 2A_1 = 2\,(\text{arie } \overline{AB} + \text{arie } \overline{BO} + \text{arie } \overline{OA}). \qquad (1)$$

Fie E şi F punctele de tangenţă ale laturilor neparalele AB şi CD.

Pentru calculul ariei A_1 este necesar să calculăm semilungimile celor două baze ale trapezului şi distanţele vârfurilor A, B la centrul O al cercului (O) înscris în trapez.

Înălţimea trapezului: $\overline{AG} = \overline{IH} = 2$, iar semidiferenţa celor două baze:

$$\overline{BG} = \frac{5}{6},$$

deci:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AG}^2 + \overline{BG}^2 = 4 + \frac{25}{36} = \frac{169}{36},$$

de unde:

$$\boxed{\overline{AB} = \frac{13}{6}}. \qquad (2)$$

Dar $\overline{AB} = \overline{AI} + \overline{BH}$, prin urmare având:

$$\overline{AI} + \overline{BH} = \frac{13}{6} \quad \text{şi} \quad \overline{BH} - \overline{AI} = \frac{5}{6} \qquad (3)$$

deducem imediat că:

$$\overline{BH} = \frac{3}{2}\,, \quad \overline{AI} = \frac{2}{3}. \qquad (4)$$

De altă parte, avem:

$$\overline{AO}^2 = \overline{OE}^2 + \overline{EA}^2 = \overline{OE}^2 + \overline{AI}^2 = 1 + \frac{4}{9} = \frac{13}{9} \;*^*_*\; \overline{AO} = \frac{\sqrt{13}}{3}$$

$$\overline{BO}^2 = \overline{OE}^2 + \overline{BE}^2 = \overline{OE}^2 + \overline{BH}^2 = 1 + \frac{9}{4} = \frac{13}{4} \;*^*_*\; \overline{BO} = \frac{\sqrt{13}}{2}.$$

Calculând acum ariile din relaţia (1), avem:

$$\text{arie } \overline{AB} = \text{arie lat. con} = \pi \overline{AG} \cdot \overline{AB} = 2\pi \cdot \frac{13}{6} = \frac{13\pi}{3},$$

$$\text{arie } \overline{BO} = \text{arie lat. con} = \pi \cdot \overline{OH} \cdot \overline{BO} = \pi \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{13}}{2} = \frac{\pi\sqrt{13}}{2},$$

$$\text{arie } \overline{OA} = \text{ar. lat. tr. con} = \pi \cdot \overline{OA} \cdot (\overline{OH} + \overline{AG}) = 3\pi \frac{\sqrt{13}}{3} = \pi\sqrt{13},$$

deducem apoi:

$$A = 2A_1 = 2\pi \left(\frac{13}{3} + \frac{\sqrt{13}}{2} + \sqrt{13}\right) = 2\pi\sqrt{13}\left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{13}}{3}\right).$$

b) Pentru cazul când $\overline{BC}$ este baza mică a trapezului, calculul este identic, iar rezultatul

$$A' = 2\pi\sqrt{13} \cdot \left(\frac{\sqrt{13}}{3} + \frac{11}{6}\right).$$

O. N. Ţ.

IV. 634. Intr'o sferă O *de rază* R *este înscris un trunchiu de con circular drept* (T). *Distanţele cercurilor de bază la centrul sferei sunt date de:*

$$d_1 = \frac{2pq}{p^2 + q^2} R \quad \text{şi} \quad d_2 = \frac{p^2 - q^2}{p^2 + q^2} R \ (p > q).$$

Să se calculeze aria laterală şi volumul trunchiului de con (T).

O. N. Ţ.

Fie M şi N centrele cercurilor de bază corespunzând distanţelor d_1 şi d_2. Pentru calculul *ariei laterale* şi *volumului* trunchiului de con (T) este necesar să calculăm razele celor două cercuri de bază, generatoarea trunchiului de con, precum şi înălţimea lui.

Observăm în primul rând, că:

$$I = \overline{MN} = d_1 + d_2 = \frac{p^2 - q^2 + 2pq}{p^2 + q^2} R, \qquad (1)$$

apoi că:

$$r_1^2 = R^2 - d_1^2 = R^2 - \frac{4p^2q^2}{(p^2+q^2)^2} R^2 = \frac{(p^2+q^2)^2 - 4p^2q^2}{(p^2+q^2)^2} R^2 =$$

$$= \frac{(p^2-q^2)^2}{(p^2+q^2)^2} R^2,$$

$$r_2^2 = R^2 - d_2^2 = R^2 - \frac{(p^2-q^2)^2}{(p^2+q^2)^2} R^2 = \frac{(p^2+q^2)^2 - (p^2-q^2)^2}{(p^2+q^2)^2} R^2 =$$

$$= \frac{4p^2q^2}{(p^2+q^2)^2},$$

deci: $\boxed{r_1 = \frac{p^2-q^2}{p^2+q^2} R = d_2 \quad ; \quad r_2 = \frac{2pq}{p^2+q^2} R = d_1}$. (2)

Fie $\overline{AP}$ înălțimea adiacentă generatoarei $\overline{AB}$, avem:

$$G^2 = \overline{AB}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{PB}^2 = I^2 + (r_2 - r_1)^2 =$$

$$= \left[\left(\frac{p^2-q^2+2pq}{p^2+q^2}\right)^2 + \left(\frac{2pq-p^2+q^2}{p^2+q^2}\right)^2\right] R^2 =$$

$$= \frac{R^2}{(p^2+q^2)^2} [(2pq+p^2-q^2)^2 + (2pq-p^2+q^2)^2] =$$

$$= \frac{2R^2(p^2+q^2)^2}{(p^2+q^2)^2} = 2R^2$$

$$*** \quad \boxed{G = R\sqrt{2}}, \qquad (3)$$

rezultat pe care îl putem obține direct, observând că unghiul corespunzător la centrul generatoarei $\overline{AB}$ este un unghiu drept.

Acum însemnând cu S și V aria laterală și volumul trunchiului de con (T), avem:

$$S = \pi R\sqrt{2}\left(\frac{p^2-q^2+2pq}{p^2+q^2}\right);$$

$$V = \frac{\pi}{3}\left(\frac{p^2-q^2+2pq}{p^2+q^2}\right)\cdot\left[\frac{(p^2-q^2)^2+4p^2q^2}{(p^2+q^2)^2} + \frac{2pq(p^2-q^2)}{(p^2+q^2)^2}\right] R^2 =$$

$$= \frac{\pi R^2}{3} \frac{(p^2-q^2+2pq)}{(p^2+q^2)^3} [(p^2+q^2)^2 + 2pq(p^2-q^2)].$$

O. N. Ț.

IV. 635. Se dă o sferă (I) *de rază r înscrisă într'un con circular drept de înălțime* h. *Știind că* $h = 2m^2$ *și* $r = m^2 - n^2$, *unde* m *și* n *sunt numere întregi* ($m > n$), *să se calculeze raportul între aria laterală a conului* (S) *și aria sferei* (I).

Să se calculeze apoi excesul volumului conului (S) *asupra volumului sferei* (I).

O. N. Ț.

Pentru calculul ariei laterale și volumului conului (S) este necesar să calculăm raza cercului de bază și generatoarea acestui con. Fie SMA triunghiul de secție în con făcută prin un plan trecând prin înălțimea SM și P punctul de contact al generatoarei SA cu sfera (I).

Triunghiurile dreptunghice SPI și SMA, având un unghiu ascuțit comun, sunt asemenea, deci avem:

$$\frac{\overline{SI}}{\overline{SA}} = \frac{\overline{IP}}{\overline{MA}} = \frac{\overline{SP}}{\overline{SM}} \qquad (1)$$

din care deducem:

$$\frac{h - r}{\overline{SA}} = \frac{r}{\overline{MA}} = \frac{\sqrt{h^2 - 2rh}}{h}, \qquad (2)$$

deci:

$$\overline{SA} = \frac{h(h - r)}{\sqrt{h^2 - 2rh}} \quad (3) \quad ; \quad \overline{MA} = \frac{rh}{\sqrt{h^2 - 2rh}}. \qquad (4)$$

Dar prin enunț este dat că: $h = 2m^2$, $r = m^2 - n^2$, ca urmare relațiile (3) și (4) devin:

$$\overline{SA} = \frac{2m^2(m^2 + n^2)}{\sqrt{4m^4 - 4m^2(m^2 - n^2)}} = \frac{2m^3(m^2 + n^2)}{2m\sqrt{m^2 - m^2 + n^2}} = \frac{m(m^2 + n^2)}{n} \qquad (5)$$

$$\overline{MA} = \frac{2m^2(m^2 - n^2)}{2mn} = \frac{m(m^2 - n^2)}{n}. \qquad (6)$$

Acum dacă însemnăm cu A și S aria laterală a conului și aria sferei, avem:

$$A = \pi \frac{m^2}{n^2}(m^2 + n^2)(m^2 - n^2) \quad ; \quad S = 4\pi(m^2 - n^2)^2$$

deci:

$$\frac{A}{S} = \frac{m^2(m^2 + n^2)}{4n^2(m^2 - n^2)}. \qquad (7)$$

De asemenea însemnând cu V şi V′ volumul conului şi al sferei, avem că:

$$V = \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{m^4}{n^2}(m^2 - n^2)^2 \quad \text{şi} \quad V' = \frac{4}{3}\pi(m^2 - n^2)^3,$$

deci:

$$V - V' = \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{m^2 - n^2}{n^2}[m^4 - 2m^2n^2 + 2n^4].$$

O. N. Ţ.

Clasa VI-a: *Exerc. 728. Fie un cerc* (O) *de rază* r; *punctele* A, B, C, D, E, F *care împart cercul* (O) *în şase părţi egale:* A′, B′, C′, D′, E′, F′ *respectiv mijloacele arcelor* DE, EF, FA, AB, BC, CD *apoi* M, N, P, Q, R, S respectiv intersecţiile perechilor de drepte: (AA′, OE); (BB′, OF); (CC′, OA); (DD′, OB); (EE′, OC); (FF′, OD).

1°. *Să se arate că:* a) *exagonul* MNPQRS *este exagon regulat;*

b) *latura exagonului* MNPQRS *este egală cu diferenţa între jumătatea laturii triunghiului echilateral înscris în cercul* (O) *şi apotema lui.*

2. *Să se calculeze aria exagonului* MNPQRS.

O. N. Ţ.

a) Observăm în primul rând că avem:

$$\Delta MEA' = \Delta NFB' = \Delta PAC' = \Delta QBD' = \Delta RCE' = \Delta SDF',$$

căci:

$$\overline{EA} = \overline{FB'} = \overline{AC'} = \overline{BD'} = \overline{CE'} = \overline{DF'}$$

$$\sphericalangle MEA' = \sphericalangle NFB' = \sphericalangle PAC' = \sphericalangle QBD' = \sphericalangle RCE' = \sphericalangle SDE'$$

$$\sphericalangle MA'E = \sphericalangle NB'F = \sphericalangle PC'A = \sphericalangle QD'B = \sphericalangle RE'C = \sphericalangle SF'D,$$

deducem:

$$\overline{ME} = \overline{NF} = \overline{PA} = \overline{QB} = \overline{RC} = \overline{SD},$$

dar: $$\overline{OE} = \overline{OF} = \overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = \overline{OD},$$

deci: $$\overline{OM} = \overline{ON} = \overline{OP} = \overline{OQ} = \overline{OR} = \overline{OS},$$

diferenţe de segmente egale.

Aşa dar, punctele M, N, P, Q, R, S se găsesc pe acelaşi cerc (γ) concentric cu cercul dat (O).

Având încă

$$\sphericalangle MON = \sphericalangle NOP = \sphericalangle POQ = \sphericalangle QOR = \sphericalangle ROS = \sphericalangle SOM = \sphericalangle AOB,$$

rezultă că exagonul MNPQRS înscris în cercul (γ) este *exagon regulat.*

b) Fie N′ punctul unde BB′ taie a doua oară cercul (γ) şi $\overline{OI}$ apotema coardei $\overline{NN'}$ în cercul (γ). Observăm acum că:

$$\text{măs. } \sphericalangle INO = \text{măs. } \sphericalangle BNC = \frac{60^0 + 30^0}{2} = 45^0,$$

deci triunghiul dreptunghiu OIN fiind *isoscel*, apotema coardei $\overline{NN'}$ este egală cu jumătatea ei, deci $\overline{NN'} = r_1\sqrt{2}$, însemnând cu r_1 raza cercului (γ); de altă parte în triunghiul EB′B, latura $\overline{B'E}$ fiind egală cu îndoitul lui $\overline{OI}$, este egală cu $\overline{NN'}$, adică $\overline{B'E} = r_1\sqrt{2}$, dar $\overline{B'E}$ în cercul (O) este latura *dodecagonului regulat convex*, deci:

$$r_1\sqrt{2} = r\sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

Transformând radicalul dublu, avem:

$$\sqrt{2 - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}},$$

ca urmare, deducem:

$$l'_6 = r_1 = r\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{r}{2} = \frac{1}{2}L_3 - A_3,$$

proprietatea cerută.

3°. Insemnând cu A_6 aria exagonului regulat MNPQRS, obţinem

$$A_6 = \frac{3\sqrt{3}}{2}\left[\frac{1}{2}L_3 - A_3\right]^2.$$

O. N. Ţ.

Exerciţii generale. *E. G. 453. Un număr adunat cu patratul şi cubul lui dă numărul 37059. Care este acel număr?*

O. N. Ţ.

Fie N numărul căutat. Avem evident $N^3 < 37050$; de altă parte $30^3 < 37059 < 40^3$, deducem că $30 < N < 40$. Următor enunţului N este o rădăcină întreagă a ecuaţiei:

$$N^3 + N^2 + N - 37059 = 0, \qquad (1)$$

cuprinsă în intervalul (30, 40). Rădăcinile întregi ale unei ecuaţii cu coeficienţi întregi sunt divizori ai termenului de gradul zero, iar $37059 = 3 \times 11 \times 1123$, rezultă că singura soluţie posibilă este

$$N = 33.$$

Având:

$$1122 = 33.34 \; ; \quad 1122 + 1 = 33\,(33 + 1) + 1 \; ;$$

$$33.1123 = 33^3 + 33^2 + 33,$$

deducem că $N = 33$ verifică ecuaţia (1) şi deci este soluţia cerută.

O. N. Ţ.

E. G. 454. Să se rezolve în numere întregi sistemul de ecuaţii:

$$E\left(\frac{x}{3}\right) = E\left(\frac{y}{5}\right) \; ; \; E\left(\frac{x}{2}\right) + E\left(\frac{y}{3}\right) = 7$$

unde E (*i*) *reprezintă întregii cuprinşi în i.*

I. L.

Prima ecuaţie ne arată că:

$$x = 3m + \alpha \quad \text{unde} \quad 0 \leqslant \alpha < 3$$

$$y = 5m + \beta \quad \text{„} \quad 0 \leqslant \beta < 5$$

A doua ecuaţie ne dă posibilităţile:

x	0, 1	2, 3	4, 5	6, 7	8, 9
y	21, 22, 23	18, 19, 20	15, 16, 17	12, 13, 14	9, 10, 11

x	10, 11	12, 13	14, 15
y	6, 7, 8	3, 4, 5	0, 1, 2

Comparând aceste soluţii cu forma generală dată de prima ecuaţie, găsim că satisface numai:

x	6, 7
y	12, 13, 14

I. L.

E. G. 455. Să se calculeze expresiile:

$$\sum_{n}^{n+p} \mathrm{E}\left(\frac{i}{n}\right) \quad \text{şi} \quad \prod_{n}^{n+p} \mathrm{E}\left(\frac{i}{n}\right)$$

unde $\mathrm{E}(x)$ *reprezintă întregii lui* x.

I. L.

Admitem $p = \alpha n + \beta$ unde $0 \leqq \beta < n$, adică:

$$\alpha = \mathrm{E}\left(\frac{p}{n}\right).$$

Dacă dăm lui i succesiv valorile:

$$n, (n+1), \quad (n+2), \ldots (n+p),$$

atunci $\mathrm{E}\left(\frac{i}{n}\right)$, capătă valorile:

1 repetat de n ori;
2 „ „ n ori;
.....
$(\alpha - 1)$ repetat de n ori;
α „ „ $(\beta + 1)$ ori.

Sumele vor fi deci:

$$n \cdot \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2} + (\beta + 1) \cdot \alpha$$

Iar produsele:

$$[(\alpha - 1)!]^n \, , \; \alpha^{\beta+1}$$

I. L.

E. G. 457. Un număr pseudo-simetric *de scară* p *este un număr care are suma cifrelor, echidistante de cifrele externe, egale cu* p *sau cu zero.*

Să se arate că numerele pseudo-simetrice *de scară* 9 *sunt divizibile cu* 9.

I. L.

Fie $N = a_1\ a_2 \ldots a_k\ a_l$ un număr pseudo-simetric de scară 9, adică avem:

$$a_1 + a_l = a_2 + a_k = \ldots = 9.$$

Atunci vom avea:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_k + a_l = M9$$

deci numerele N vor fi divizibile cu 9.

I. L.

E. G. 458. Să se determine numerele pseudo-simetrice *de patru cifre şi de scară 11, care sunt divizibile cu 11.*

I. L.

Fie $N = abcd$, atunci: $a + d = b + c = 11$.

Dar condiţia de divizibilitate cu 11 ne spune că trebuie să avem:

$$10.a + b + 10.c + d = M11$$

ceea ce ne dă:

$$9\ (a + c) = M11 \quad \text{adică} \quad a + c = 11.$$

Avem deci soluţiile:

$$N = \alpha\alpha\beta\beta$$

unde:

α	2	3	4	5	6	7	8	9
β	9	8	7	6	5	4	3	2

I. L.

Până la 1 Noemvrie 1942 s'au primit soluții bune (la exercițiile publicate în numerele 8, 9 ale anului al VIII-lea și Nr. 1 anul al IX-lea)(*) dela:

Liceul „Samuil Vulcan", Beiuș.

Clasa VI-a: Goldiș T. Gheorghe (VI: 746, 8; E. G.: 472, 3, 4); Logofătu M. Tănase (VI: 746, 8*; VII: 659; E. G.: 472).

Liceul de fete „Carmen-Sylva", București.

Clasa VII-a: Damian C. Lucia (VIII: 565, 69; E. G.: 439, 40); Maxim N. Viorica (VII: 655, 6, 7; VIII: 564, 5).

Clasa VII-a: Ionescu I. Florica (VIII: 565, 6, 8).

Școala Centrală de fete, București.

Clasa VII-a: Teodorescu C. Maria (VII: 655, 60; VIII: 564, 5, 9).

Colegiul Național „Sf. Sava", București.

Clasa VII-a: Horbuniev P. Vasile (VII: 655, 9); Mișicu M. (VII: 655, 6, 7, 61; VIII: 564, 5, 8); Purica Ionel (VII: 655, 7, 60; VIII: 565, 6, 7, 8).

Liceul „Aurel Vlaicu", București.

Clasa VI-a: Marinescu E. Emil (VI: 746, 8).

Liceul „Matei Basarab", București.

Clasa VII-a: Antonescu D. Eugen (VII: 564, 5).

Liceul „Titu Maiorescu", București.

Clasa IV-a: Seni Gh. Dinu (IV: 627).

Clasa VIII-a: Grigoriu N. Nicolae (VIII: 564, 5, 6, 7, 8); Tănăsescu Vasile (VIII: 564, 5, 6, 8, 9).

Liceul „Marele Voevod Mihai", București.

Clasa VIII-a: Bratu I. Eugen (VIII: 564, 5, 6, 8, 9).

Liceul „Gheorghe Șincai", București.

Clasa VIII-a: Constantinescu I. Emil (VIII: 564, 5, 6*, 7, 8, 9).

---

*) Numărul unui exercițiu foarte bine rezolvat și îngrijit redijat este însoțit de semnul *.

Liceul „B. P. Hasdeu", Buzău.

Clasa VII-a: Petculescu D. Mircea (VII: 655, 6, 7; VIII: 564, 5, 8*, 9).

Liceul „Ioniță Assan", Caracal.

Clasa VII-a: Marinescu Gh. Ion (VIII: 564, 5, 9).

Liceul „Aron Pumnul", Cernăuți.

Clasa VIII-a: Diacon Al. (E. G.: 443).

Liceul Militar „Ștefan cel Mare", Cernăuți.

Clasa VII-a: Balaș Ovidiu (VII: 654, 5, 6; VIII: 564, 5, 7, 8); Cimbru V. Mihaiu (VIII: 564, 5); Gradu Silviu (VIII: 564, 5, 7, 8); Popescu A. Nicolae (VIII: 564, 5, 8); Ranga Al. Constantin (VIII: 564, 5, 8); Staicu (VIII: 564, 5, 8, 9); Spirescu Gh. Nicolae (VIII: 564, 5, 8); Zuzuleac Nicolae (VIII: 564, 5, 8).

Liceul „Alecu Russo", Chișinău.

Clasa VII-a: Vasiliu A. (E. G.: 443).

Liceul „Domnița Ileana" Constanța.

Clasa VIII-a: Ionescu T. Virginia (VIII: 564; 6, 8, 9).

Liceul de Aplicație, Iași.

Clasa VIII-a: Cubat A. (E. G.: 443, 74); Donțu Gh. Gheorghe (VIII: 564, 5, 6, 7, 8, 9, 70, 1,3*).

Liceul Internat, Iași.

Clasa V-a: Marta C. Liviu (V: 751, 2).
Clasa VII-a: Dolinescu C. Marcel (VII: 655, 7; VIII: 564, 5, 9),

Liceul Militar, Iași.

Clasa V-a: Balan Corneliu (V: 751); Bălăscuță T. Traian (V; 752); Bârzescu Mircea (V: 750, 1, 2, 3, 4; VI: 746; E. G.: 472, 6, 7, 8, 80); Chirilovici C. Dumitru (V: 751); Ciumașu Viorel (V: 751, 2, 3, 4; E. G.: 472); Ciureanu Gh. Gonst. (V: 751, 2, 3; E. G.: 472); Ciobanu D. Dan (V: 751, 2); Dumitrescu A. George (V: 752); Ifrim I. Alfons (V: 752); Ionescu I. Eduard (V: 752); Lupu Marius (V: 752): Marian D. Călin (V: 752); Marinescu N. Gh. (V: 572); Martin P. Virgil (V: 752); Nache D. Dumitru (V: 751, 2, 3, 4; E. G.: 472); Paloșeanu N. (V: 752); Păsculescu H. (V: 752); Popa N. Ioan (V: 752, 3); Radu M. Const, (V: 750, 2); Russen N. Liviu (V: 752); Stamate D. (E. G.: 424).

Clasa VII-a: Andarachi Ion (VII: 655, 6, 7, 8, 9, 61; VIII: 564, 5, 9); Andrei Gh. Aurel (VII: 655, 6, 7, 8, 9, 61; VIII; 564, 5, 9; E. G.: 472, 6, 7, 8, 80); Andreescu Mihai (VII: 656; VIII: 564, 5, 9; E. G.: 472); Ardeleanu Gh. Gh. (VII: 656; VIII: 564, 5); Baicu C. D-tru (VII: 655, 6; VIII: 564); Basacopol Alex. (VII: 656, 7, 9; VIII: 565); Bosinceanu Const. (VII: 655, 6, 7, 9; VIII: 564, 5, 9); Capreide Gh. A. (VII; 656); Cecală Şt. Ioan (VII: 656, 7; VIII: 565); Chirulescu C. Daniel (VII: 656, 7, 8, 9; VIII: 565, 9); Coroiu Dan (VII: 656; VIII: 565, 9); Ganea D. Nic. (VIII: 564, 5, 9); Gheorghiu N. Ştefan (VII: 655, 6, 7, 61; VIII: 564, 6, 9); Opran I. Mircea (VII: 656, 9; VIII: 564, 5, 9); Palade Tudorache (VII: 655: VIII: 564, 5, 9); Petrache C. Ioan (VII: 656, 9; VIII: 564, 5); Petrican I. Mihai (VII: 655, 6, 7; VIII: 564, 5, 9); Popa N. Nicolae (VII: 655, 6, 7, 8, 9; VIII: 564, 5, 9); Popa D. Petre (VII: 655, 6, 7, 8, 9; VIII: 564, 5, 9); Puiu I. Virgil (VII: 656, 7; VIII: 565); Simion Adrian (VII: 655, 6, 7, 61; VIII: 565); Ţicoliu D. Octavian (VII: 655, 6; VIII: 564, 5, 9); Turculeţ Tiberiu (VII: 655, 6, 7, 8, 9, 61; VIII: 564, 5, 9; E. G.: 472, 6, 7, 8, 80); Văideanu M. Georgel (VII: 655, 6; VIII: 565, 9); Vasiliu Gh. Dumitru (VII: 655, 6, 7, 8. 9, 61; VIII: 564, 5, 6, 7, 8, 9; E. G.: 472, 4, 6, 7, 8, 80); Vlad A. Gheorghe (VII: 656; VIII: 565); Zaharia Mihai (VII: 655, 6, 7, 9; VIII: 564, 5, 9).

Colegiul Naţional Militar „N. Filipescu", Predeal.

Clasa V-a: Frăţianu L. (E. G.: 443); Palade C. (E. G.: 443).

Clasa VI-a: Columbeanu D. Petre (VI: 746; VII: 655, 6, 7, 9; VIII: 564, 5, 7, 8; E. G.: 477); Ghiţă M. Vasile (VI: 746, 8, 9; VII: 655, 6, 7: VIII: 564, 5, 8); Marinescu C. Marinel (VI: 748).

Liceul „Radu Greceanu", Slatina-Olt.

Clasa VI-a: Ionescu V. Mihail (VI: 746, 9).

Liceul „Enăchiţă Văcărescu", Târgovişte.

Clasa VIII-a: Alboteanu B. Vasile (VIII: 564, 5, 6, 8, 9).

Liceul Militar „Mihai Viteazul", Timişoara.

Clasa V-a: Berceanu M. Corneliu (V: 752, 3); Streja N. Iorgu (V: 752, 3); Vrânceanu Gh. Gheorghe (V: 752, 3, 4; VI: 746, 8, 9; VII: 654, E. g.: 473, 4).

Clasa VII-a: Chirculescu Iosif (VII: 656; VIII: 564); Dumitrescu Gh. Traian (VIII: 564, 5, 8); Păläceanu Vasile (VII: 656, 7; VIII: 564, 5); Pârvan D. Ioan (VII: 656, 7, 8; VIII: 564, 5, 9); Stancu M. Ioan (VII: 656, 7, 8; VIII: 564, 5, 9).

Liceul „Sf. Haralambie", Turnu-Măgurele.

Clasa VIII-a: Vasilescu N. Vasile (VIII: 566, 8).

Liceul teoretic de fete, Turnu-Severin.

Clasa VIII-a: Pleniceanu P. Ileana (VIII: 566, 8).

EXERCIŢII PROPUSE

Soluţiile exerciţiilor propuse în acest număr se primesc până la 1 Martie 1943

Clasa III-a. *Exerc. 216.* Se aşază pe masă trei fâşii de carton dreptunghiulare şi egale, lipite prin lungimile lor.

Ştiind că, astfel aşezate, ele formează un pătrat de arie $47{,}61\ cm^2$, să se afle dimensiile unei fâşii.

V. Gh.

III. 217. Fie triunghiul oarecare ABC şi $\overline{AA'}$ înălţimea lui corespunzătoare vârfului A. Cercul descris pe $\overline{AA'}$ ca diametru taie, a doua oară, laturile AB şi AC în C_1 şi B_1.

Să se arate că: 1°. Punctele B, C, B_1, C_1 sunt pe acelaşi cerc.

2°. Dreapta, care trece prin mijloacele diagonalelor $\overline{AA'}$ şi $\overline{B_1C_1}$ ale patrulaterului $AC_1A'B_1$, este perpendiculară pe tangenta în A la cercul ABC.

O. N. Ţ.

III. 218. Fie (O) şi (C) două cercuri oarecare, tangente în punctul A (interior sau exterior). Două secante oarecare AS, AS' taie cercurile (O) şi (C) respectiv în punctele M, M' şi N, N'. Coardele MM' şi NN' sunt paralele.

Reciproc. Fiind date cercurile (O) şi (C) tangente în A (interior sau exterior) şi ducând o secantă oarecare MAN, iar prin M şi N două coarde paralele (de direcţie oarecare) MM', NN', dreapta M'N' trece prin punctul A.

Cum trebuie luată direcţia coardelor paralele $\overline{MM'}$, $\overline{NN'}$, pentru ca punctele M, M', N', N să fie pe un acelaşi cerc?

O. N. Ţ.

Clasa IV-a. *Exerc. 643.* Fie $x'x$ o axă orientată, O punctul origină ales pe ea şi unitatea de măsură cât o jumătate de centimetru.

Să se reprezinte exact pe această axă numerele:

$$N = -3 + \sqrt{2} + \sqrt{3} \ ; \ N' = -1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{6};$$

$$N'' = +2 + \sqrt{5} - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3}.$$

Apoi să se calculeze şi să se reprezinte *suma* şi *produsul* acestor trei numere algebrice *).

O. N. Ţ.

IV. 644. Să se verifice identitatea:

$$c^2(a-1)(b-1)(a-b)[a(b-1)^2+b(a-1)^2+(a-b)^2]$$
$$+a^2(b-1)(c-1)(b-c)[b(c-1)^2+c(b-1)^2+(b-c)^2]$$
$$+b^2(c-1)(a-1)(c-a)[c(a-1)^2+a(c-1)^2\cdot(c-a)^2]$$
$$+(a-b)(b-c)(c-a)[c(a-b)^2+a(b-c)^2+b(c-a)^2]\equiv 0.$$

I. I. S.

IV. 645. Se dă o prismă dreaptă OABCDE cu înălţimea $\overline{OC}=h$, iar baza OAB un triunghiu echilateral de latură a.

Fie I proiecţia vârfului O pe planul ABC.

Să se calculeze distanţele punctului I la vârfurile prizmei date.

Caz particular: înălţimea h egală cu $\frac{a}{2}$.

O. N. Ţ.

IV. 646. Se dă un exagon regulat ABCDEF, cu latura a şi centrul O. In punctul O pe planul ABC se ridică o perpendiculară $\overline{OS}=h$.

Să se arate, că distanţele punctului O la planele SAB, SBC, SCD, SDE, SEF, SFA sunt egale şi să se calculeze măsura lor comună.

O. N. Ţ.

Clasa V-a. *Exerc. 760.* Cu raza unui cerc şi cu latura pătratului înscris în acel cerc, luate ca dimensiuni, se construieşte dreptunghiul ABCD.

Cercurile descrise pe $\overline{DA}$ şi $\overline{DC}$ ca diametre se taie a doua oară în M.

Punctul M este centrul de greutate al triunghiului DCB.

Reciproca proprietăţii este adevărată.

O. N. Ţ.

---

*) Se poate consulta: *Algebra elementară clasa IV-a* de O. N. Ţino (Editura Cugetarea, Bucureşti).

V. 761. Dacă $\overline{AA'}$ este înălțime și $\overline{BB'}$ bisectoare în triunghiul ABC, atunci egalitatea:

$$a \cdot \overline{BA'} = c \cdot \overline{CB'}$$

are loc numai când triunghiul este isoscel.

GH. B.

V. 762. Se dă un triunghiu ABC. In A se ridică dreptele (A_b), (A_c) perpendiculare pe AB, AC; în B se ridică dreptele (B_a), (B_c) perpendiculare pe BA, BC; în C dreptele (C_a), (C_b) perpendiculare pe CA, CB. Dreptele (A_c), (B_c) se întâlnesc în C'; (B_a), (C_a) în A', iar A_b, C_b în B'.

Să se arate, că dreptele AA', BB', CC' sunt concurente.

C. I. B.

V. 763. Să se simplifice fracția algebrică:

$$F = \frac{x^6 + y^6 - z^6 - 9x^2y^2z^2 + 2x^3y^3 + 6xyz^4}{x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2x^2z^2 - 2y^2z^2}.$$

O. N. Ț.

V. 764. Să se arată că:

$$\frac{\dfrac{(x-1)(x^2-1)}{(x+1)(x^2+1)}}{2\left[1+\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2\right]} = \left[\frac{\dfrac{x-1}{x+1}+\dfrac{x^2-1}{x^2+1}}{3+\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2}\right]^2.$$

I. I. S.

Clasa VI-a. *Exerc. 758.* Pe ipotenuza BC a triunghiului BAC, dreptunghic și isoscel, se ia un punct P. Să se arate că:

$$\overline{PB} = \overline{PC}\ \mathrm{tg}\,\widehat{PAB}\ ;\quad \overline{PC} = \overline{PB} \cdot \mathrm{tg}\,\widehat{PAC}.$$

GH. B.

VI. 759. Să se arate, că:

$$\frac{\sin(a-b)\sin(a+b)+\sin a+\sin b}{\sin(a-b)\sin(a+b)-\sin a-\sin b} = \frac{\sin a-\sin b+1}{\sin a-\sin b-1}.$$

I. I. S.

VI. 760. Să se arate, că:

$$\text{tg}a \cdot \text{tg}2a - 2(1 - \text{tg}^2 a) = (2 + \text{tg}2a)(\text{tg}^2 a + \text{tg}a - 1).$$

I. I. S.

VI. 761. Să se arate, că, dacă într'un triunghiu oarecare $A = 2B$, avem în acel triunghiu relaţiile:

$$(b + c)\,\text{tg}B + (b - c)\,\text{tg}2B = 0$$

$$S = \frac{a^2 \sin B \sin 3B}{2 \sin 2B}.$$

I. I. S.

VI. 762. Să se arate că într'un triunghiu dreptunghiu sau isoscel avem relaţia:

$$(b + c)^2 \left(1 + \text{cotg}\frac{B}{2}\right)\left(1 + \text{cotg}\frac{C}{2}\right) = bc\left(2 + \text{cotg}\frac{B}{2} + \text{cotg}\frac{C}{2}\right)^2.$$

I. I. S.

VI. 763. Se dă un exagon regulat ABCDEF, cu latura a şi centrul O. In punctul O, pe planul ABC se ridică o perpendiculară $\overline{OS} = h$. Să se arate, că:

a) Distanţele punctului O la planele SAB, SBC, SCD, SDE, SEF, SFA sunt egale; să se calculeze măsura lor comună.

b) Fie A', B', C', D', E', F' proiecţiile punctului O pe planele SAB, SBC, SCD, SDE, SEF, SFA; ele sunt într'un plan paralel cu baza ABEDEF.

c) Urma planului A'B'C' pe suprafaţa piramidei SABCDEF este un exagon regulat; să se calculeze latura acestui exagon regulat.

d) Exagonul A'B'C'D'E'F' este regulat; să se calculeze *perimetrul* său, *aria* lui şi distanţa lui la vârful S.

O. N. Ţ.

Clasa VII-a. *Exerc. 669.* Aplicând proprietăţile determinanţilor, să se calculeze valoarea determinantului:

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} (a-b)^2 & (a-c)^2 & (b-c)^2 \\ (b-a)^2 & (b-c)^2 & (a-c)^2 \\ (c-a)^2 & (c-b)^2 & (a-b)^2 \end{vmatrix},$$

descompusă în factori.

O. N. Ţ.

VII. 670. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{aligned} &x\cos 2\alpha + y + z(\cos^3\alpha + \sin^3\alpha) = 0 \\ &x + y\cos 2\alpha + z(\cos^3\alpha - \sin^3\alpha) = 0 \\ &x(\cos^3\alpha + \sin^3\alpha) + y(\cos^3\alpha - \sin^3\alpha) + z\cos 2\alpha = 0. \end{aligned}$$

I. I. S.

VII. 671. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} (a^2-b^2)x + (b^2-c^2)y + (c^2-a^2)z = 0 \\ c(a-b)x + a(b-c)y + b(c-a)z = 0 \\ c^2(a^2-b^2)x + a^2(b^2-c^2)y + b^2(c^2-a^2)z = 0. \end{cases}$$

O. N. Ţ.

VII. 672. Să se discute şi să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} (a^2-b^2)x + (b^2-c^2)y + (c^2-a^2)z = 0 \\ c(a-b)x + a(b-c)y + b(c-a)z = 0 \\ a(a^2-bc)x + b(b^2-ca)y + c(c^2-ab)z = 0. \end{cases}$$

O. N. Ţ.

VII. 673. Să se determine condiţiile ca sistemul:

$$\begin{cases} x\cos^2\alpha + y\sin^2\alpha - z = l_1 \\ -x + y\cos^2\alpha + z\sin^2\alpha = l_2 \\ x\sin^2\alpha - y + z\cos^2\alpha = l_3 \\ l_1x + l_2y + l_3z = 0 \end{cases}$$

să fie compatibil şi să se rezolve în acel caz.

O. N. Ţ.

VII. 674. Fiind dat sistemul:

$$\begin{cases} ax + by + cz = -3abc \\ ay + bz + ct = a^3 \\ az + bt + cx = a^3 \\ at + bx + cy = c^3 \end{cases}$$

să se arate că, dacă $a = b = c$ sau $a + b + c = 0$, sistemul este nedeterminat.

In cazul când a, b, c nu sunt toate egale şi $a + b + c \neq 0$, să se reducă rezolvarea sistemului la un sistem de trei ecuaţii cu trei necunoscute, calculând mai întâi suma celor patru necunoscute şi să se rezolve apoi.

O. N. Ţ.

VII. 675. a, b, c fiind trei numere diferite de zero, să se găsească condiţia ca sistemul;

$$ax + by + cz = 0$$

$$a\,(a^2 - bc)\,x + b\,(b^2 - ca)\,y + c\,(c^2 - ab)\,z = 0$$

$$a^2\,(a^2 - b^2 - c^2)\,x + b^2\,(b^2 - c^2 - a^2)\,y + c^2\,(c^2 - a^2 - b^2)\,z = 0$$

să fie compatibil şi să se găsească valorile necunoscutelor în acest caz.

O. N. Ţ.

Clasa VIII-a. *Exerc. 580.* Să se rezolve ecuaţia:

$$\frac{(x-2)(2x-1)}{25(3x-4)} = \left(\frac{x-1}{x+7}\right)^2,$$

ştiind că admite o rădăcină dublă.

I. I. S.

VIII. 581. Sa se studieze variaţia funcţiei:

$$y = \sqrt{\frac{2x^2 - 3x - 5}{x^3 + 15x^2 + 6x + 10}}$$

determinându-se regiunile de existenţă şi continuitate, abscisa *maximului* fiind calculată cu aproximaţie de 0,01.

O. N. Ţ.

VIII. 582. Să se studieze variaţia funcţiei:

$$y = \pm \sqrt{\frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{208x^3 - 1458x^2 + 2673x - 1458}},$$

determinându-se regiunile de existenţă şi continuitate, iar abscisele minimului şi maximului să fie calculate cu o aproximaţie de 0,01. Să se construiască curba reprezentativă a variaţiei funcţiei.

O. N. Ţ.

VIII. 583. Să se studieze variaţia funcţiei:

$$y = \pm \sqrt{\frac{(x-a)(x-b)(x-c)}{(x-A)(x-B)(x-C)}},$$

unde:

$$A = \frac{3}{\frac{2}{b} + \frac{2}{c} - \frac{1}{a}}\ ;\quad B = \frac{3}{\frac{2}{c} + \frac{2}{a} - \frac{1}{b}}\ ;\quad C = \frac{3}{\frac{2}{a} + \frac{2}{b} - \frac{1}{c}}$$

şi curba reprezentativă a acestei variaţii.

O. N. Ţ.

VIII. 584. Se dau dreptele:

$(D_1)\ x + ay + a^2 = 0$; $(D_2)\ ax + a^2y + 1 = 0$; $(D_3)\ a^2x + y + a = 0$.

Să se arate că există o valoare a lui a cuprinsă între 0 şi 1, care face aria triunghiului, determinat de cele trei drepte, minimă. Să se calculeze acea valoare cu două zecimale exacte.

C. I. B.

VIII. 585. Se dau cercurile:

(C) $\quad x^2 + y^2 - 2ax - 4ay - 1 = 0$

(C') $\quad x^2 + y^2 - x + y - a^2 = 0$

şi punctul $A(a,\ a+1)$.

Să se arate că acest punct nu se află în regiunea interioară celor două cercuri.

C. I. B.

VIII. 586. Fie două cercuri (O) şi (O'), tangente în A, raza celui mic fiind jumătatea razei celui mare.

Ducem în aceste două cercuri respectiv razele $\overline{OM}$ şi $\overline{O'M'}$ astfel ca $\sphericalangle MOO' = \sphericalangle M'O'O = \varphi$.

Care este locul punctului P de întâlnire al diagonalelor patrulaterului OMM'O', când unghiul φ variază?

O. N. Ţ.

VIII. 587. Fiind dat un cerc (O) şi doi diametri perpendiculari (AC şi BD), unul pe altul, luăm punctul A_1 şi B_1 respectiv pe AC şi BD, astfel ca $\overline{AA_1} = \overline{BB_1}$. Ducem prin A_1 secanta A_1MN, iar prin B_1 secanta B_1PQ perpendiculară pe A_1N; apoi pe coarda $\overline{NQ}$ luăm punctul S astfel ca $\frac{\overline{SN}}{\overline{SQ}} = k$, unde k este un număr constant.

Să se găsească locul punctului S.

Să se dea şi o soluţie prin geometria elementară pură.

O. N. Ţ.

Exerciţii generale. *Exerc. 490.* Produsul numerelor dintr'o tablă a lui PITAGORA este $(n!)^{2n}$.

V. GH.

E. G. 491. Dacă $n(N)$ reprezintă numărul divizorilor lui N şi dacă A şi B au aceiaşi factori primi, atunci:

$$n(A) \cdot n(B) > n(A \cdot B)$$

$$n(A^p) \cdot n(B^q) > n[(A \cdot B)^{p+q}].$$

I. L.

E. G. 492. Dacă $s(N)$ reprezintă suma divizorilor lui N, atunci avem:

$$s(A) \cdot s(B) > s(A \cdot B).$$

I. L.

E. G. 493. Care este cel mai mic număr, de două cifre, care are *zece* divizori?

I. L.

E. G. 494. Pentru ce valori ale lui x şi trinomul

$$T \equiv 5x^2 + 2x - 15$$

este pătrat perfect.

Aceeaşi chestiune pentru trinomul $T \equiv 4x^2 - 3xy + 11y^2$.

V. GH.

E. G. 495. Să se arate, că în intervalul de numere consecutive dela 100 la 1000 sunt de 90 ori atâtea numere prime cu 10 câte sunt dela 1 la 10.

I. L.

E. G. 496. Să se arate, că suma numerelor prime cu $N = 2^{\alpha} \cdot 3^{\beta}$ şi mai mici ca el, este mai mare ca suma divizorilor lui.

I. L.

E. G. 497. Dacă $S_x(y)$ reprezintă suma numerelor prime cu y din şirul natural al numerelor până la x, atunci să se calculeze suma:

$$S_{100}(21) + S_{21}(100).$$

I. L.

E. G. 498. Să se arate că:

$$\left(\frac{100!}{50!}\right)^4 - 1 = \mathcal{M}\,101.$$

I. L.

INSTRUCŢIUNI

a) Soluţiile exerciţiilor se vor scrie cu cerneală, pe sferturi de coală şi numai pe o parte a foii.

Dacă va fi nevoie de mai multe foi pentru soluţionarea unui exerciţiu, ele se vor coase sau lipi în partea stângă. Figurile, ce vor fi necesare pentru urmărirea exerciţiului se vor construi îngrijit, pe foi aparte, având formatul arătat mai sus şi se vor coase sau lipi odată cu soluţia.

Nu se vor trimite soluţiile mai multor exerciţii pe aceeaşi foaie.

b) Redactarea soluţiilor se va face astfel:

Sus, se va scrie numărul exerciţiului, dedesubt enunţul astfel cum e publicat în revistă, cu iniţialele propunătorului, apoi soluţia clar compusă, iar la sfârşit, iscălitura rezolvitorului în ordinea următoare:

Numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie, urmat de clasa şi şcoala pe care o urmează.

c) Nu se vor lua în considerare soluţiile iscălite de 2 sau mai mulţi corespondenţi, nici soluţiile exerciţiilor propuse la clase inferioare aceleia în care corespondentul se află. Pentru redijarea soluţiilor se pot vedea indicaţiile din Nr. 1, Vol. IV.

d) Soluţiile se primesc timp de 3 luni dela propunerea exerciţiului, numai dela abonaţii „Suplimentului cu Exerciţii" al Gazetei Matematice, pe adresa Casa Gazeta Matematică, Calea Griviţei 158, Bucureşti 2.

Drepturile de reproducere rezervate Societăţii «Gazeta Matematică».

Elevii claselor VI, VII şi VIII, cu bogată activitate la această revistă îşi pot lărgi cadrul activităţii rezolvând probleme din „Gazeta Matematică".

In Biblioteca „Gazetei Matematice" au apărut şi se găsesc la adresa indicată mai sus, următoarele:

III. **N. Abramescu,** Lecţiuni elementare de Algebră superioară, pentru clasa VIII-a ştiinţifică, Ediţia VII-a . . . . . .Lei 200

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** Vocabular Matematic . . . . . .Lei 20

VII. **Gh. Lazăr,** *Trigonometrie drept liniară* (după cursul predat de **Gh. Lazăr** la colegiul Sf. Sava) . . . . . .Lei 10

X. **G. Ţiţeica,** Culegere de Probleme de Geometrie . . . .Lei 220

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. Istoric, învăţăminte. Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . .Lei 300 / pentru abonaţii G. M. şi S. G. M. . . .Lei 150

XII. **V. Cristescu,** Culegere de Probleme de Trigonometrie. Partea I. (Goniometrie) revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . .Lei 140

XIII. **I. Ionescu,** Culegere de Probleme de Aritmetică. Partea I. Aritmetica raţionată . . . . . .Lei 250

XIV. **V. Cristescu,** Culegere de Probleme de Trigonometrie. Partea I-a. (Trigonometrie plană). Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . .Lei 140

XV. **A. G. Ioachimescu,** Culegere de Probleme de Algebră. Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . .Lei 170

XVI. **G. Ţiţeica,** Culegere de Probleme de Geometrie Analitică. Partea I. Ediţia II-a, adăogită de *N. G. Botea* . . . . . .Lei 230

XVII. **A. G. Ioachimescu,** Culegere de Probleme de Algebră. Partea II-a. Ediţia IV-a, revăzută şi mărită . . . . . .Lei 350

Biblioteca Istorică a GAZETEI MATEMATICE

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană) tradusă din limba greacă de *V. Marian* . . . . . .Lei 250

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile VII—IX de Aritmetică şi Cartea X a Iraţionalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 300

III. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile XI—XIII de Geometrie în spaţiu; Cartea XIV a lui HYPSICLE şi Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian**. . . . . Lei 200

Biblioteca Matematică „GEORGE ŢIŢEICA"

I. **Ion Ionescu,** *Maxime şi minime geometrice* . . . . . Lei 160

Suplimentul cu Exerciţii. Abonamentul anual (9 numere) . . **Lei 100**

„Gazeta Matematică" apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 300 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimite pe adresa:

Societăţii „GAZETA MATEMATICĂ"

Casa Gazeta Matematică — Calea Griviţei No. 158. — Bucureşti 2.

(Telefon: 3-9803).

M. O., IMPRIMERIA NAŢIONALĂ. — C. 83. 40

M2546

Biblioteca „ASTRA"
- SIBIU -

GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCIŢII

ANUL IX. No. 4 1 IANUARIE 1943

8- MAR 2014

22

BIBLIOTECA CENTRALĂ
„ASOCIAŢIUNII"
SIBIIU

SOCIETATEA GAZETA MATEMATICĂ
CALEA GRIVIŢEI, 158. BUCUREŞTI 2. — TELEFON 3-9803

74324

GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCIŢII

ANUL IX. No. 4 — 1 IANUARIE 1943

ABONAMENTUL LEI 100 PE AN (9 numere)

Soluţii şi orice corespondenţă pe adresa:

Casa «Gazeta Matematică», Calea Griviţei 158. — Bucureşti 2

EXERCIŢII REZOLVATE

Exerciţii generale. *E. G. 456. Dacă avem:*

$$\sqrt{n} = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{2b + \cfrac{1}{b + \sqrt{n}}}}$$

atunci avem şi:

$$\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{b}}\right) = n.$$

I. L.

Mai extins avem (vezi „Algèbre, Théorie des Nombres“ culegere de probleme de C. A. LAISANT):

$$\sqrt{n} = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{2c + \cfrac{1}{b + \sqrt{n}}}}$$

antrenează:

$$n = \left(a + \frac{1}{b}\right)\left(a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c}}\right)$$

unde mai sus am făcut $c = b$.

Dar în general avem:

$$y = \frac{1}{\sqrt{n} - a} = b + \frac{1}{2c + \frac{1}{b + \sqrt{n}}}$$

sau:

$$y = [b,\ 2c,\ (a + b), \ldots].$$

Adică avem o fracție nelimitată, unde y este dat de ecuația:

$$Q_3 . y^2 + (Q_2 - P_3) . y - P_2 = 0$$

unde:

$$P_2 = 2bc + 1 \qquad Q_2 = 2c$$

$$P_3 = (2bc + 1)(a + b) + b \qquad Q_3 = 2c(a + b) + 1.$$

Prin urmare:

$$n - a^2 = \frac{1}{y}\left(\frac{1}{y} + 2a\right).$$

Apoi cum:

$$n - a^2 = \frac{c(ab + 1)}{b(bc + 1)} + \frac{a}{b}.$$

Rămâne să se verifice egalitatea membrilor II.

I. L.

E. G. 459. Să se arate că suma patratelor a trei numere prime, mai mari ca 2, este de cele mai multe ori divizibilă cu 3.

I. L.

Știm că în general un număr prim, mai mare ca 2, este de forma: $(M6 \pm 1)$, prin urmare vom avea:

$$(M6 \pm 1)^2 + (M6 \pm 1)^2 + (M6 \pm 1)^2 = M6 + 3 = M3.$$

I. L.

E. G. 460. Să se arate că, dacă unui număr pseudo-simetric *de patru cifre îi schimbăm între ele* două *sau mai multe cifre* alăturate, *nu se poate obține un alt număr pseudo-simetric având altă scară.*

I. L.

Fie $N = abcd$ şi $a + d = b + c = p$.

Să presupunem că formăm numărul $N' = bacd$ şi că avem:

$$b + d = a + c = p'.$$

Atunci vom avea:

$$b + p - a = a + p - b = p'.$$

Adică trebuie să avem:

$$b - a = a - b = p' - p$$

ceea ce nu se poate.

I. L.

E. G. 461. Care sunt numerele de o cifră, x şi y, care satisfac relaţia:

$$\varphi(x) + \varphi(y) = \varphi(x + y)$$

$\varphi(n)$ fiind indicatorul lui n?

I. L.

Prin încercări se deduce că avem:

x sau y	0	1	2	4	5	6	8	9
y sau x	oricare	2	1, 2	4, 5, 6	4	4, 6, 8, 9	6, 8	6

I. L.

E. G. 462. Să se arate că, dacă p este un număr prim mai mare ca 3, avem:

$$\varphi(p!) > (p - 1)!$$

$\varphi(n)$ fiind indicatorul lui n.

I. L.

In adevăr, să presupunem că:

$$(p - 1)! = 2^{\alpha} \cdot b^{\beta} \cdot c^{\gamma} \ldots l^{\lambda}$$

unde avem:

$$2 < b < c < \ldots < l < p$$

atunci avem:

$$\varphi(p!) = 2^{\alpha-1} \cdot b^{\beta-1} \cdot c^{\gamma-1} \ldots l^{\lambda-1} \cdot (b - 1)(c - 1) \ldots (l - 1) \cdot (p - 1).$$

Prin urmare neegalitatea devine:

$$(b-1)(c-1)\ldots(l-1)(p-1) > 2.b.c\ldots l.$$

Dar presupunem prin absurd că avem:

$p-1=l$ (în realitate $p-1>l$), atunci neegalitatea devine:

$$(b-1)(c-1)\ldots(l-1) > 2.b.c\ldots k.$$

De asemenea presupunem că avem, $l-1=k$, ceea ce de asemenea nu este posibil, totuși atunci neegalitatea devine:

$$(b-1)(c-1)\ldots(k-1) > 2.b.c\ldots j.$$

Și tot așa mai departe, vom ajunge la o neegalitate de forma:

$$(b-1)(c-1) > 2.b.$$

Sau chiar, dacă prin absurd, admitem $c-1=b$, la neegalitatea:

$$c-1 > 2.$$

Or, cum $2<b<c$ urmează că, în orice caz $c>3$, deci neegalitatea este dovedită.

Ultima neegalitate se mai poate stabili observând că avem:

$$p-1 \geqslant l$$
$$l-1 \leqslant k$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$c-1 \geqslant b$$
$$b-1 \geqslant 2.$$

In general dacă $N = a^{\alpha}.b^{\beta}\ldots k^{\varepsilon}.l^{\lambda}$, atunci avem:

$$l.\varphi(N) > N$$

deoarece observăm că:

$$(a-1)(b-1)\ldots(k-1)(l-1) > a.b\ldots k$$

deoarece avem:

$$l-1 \geqslant k$$
$$k-1 \geqslant j$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$b-1 \geqslant a$$
$$a-1 \geqslant 1.$$

Aceasta ne poate face să scriem că dacă avem n numere întregi şi pozitive:

$$x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$$

atunci:

$$x_n > \prod_1^n \frac{x_i}{x_i - 1}.$$

I. L.

E. G. 463. Să se calculeze suma

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{3^6} - \frac{1}{3^7} + \frac{2}{3^8} + \frac{1}{3^9} - \frac{1}{3^{10}} - \frac{1}{3^{10}.11}.$$

GH. B.

Aducând la acelaşi numitor, suma dată devine

$$\frac{2.3^9.11 - 3^8.11 + 2.3^7.11 + 3^6.11 - 3^4.11 - 3^3.11 + 2.11.3^2 + 3.11 - 11 - 4}{3^{10}.11}.$$

Numărătorul este divizibil prin 3. După simplificare avem

$$\frac{2.3^8.11 - 3^7.11 + 2.3^6.11 + 3^5.11 - 3^3.11 - 3^2.11 + 2.11.3 + 11 - 5}{3^9.11}.$$

Noul numărător este, iar divizibil prin 3. Se continuă pe această cale şi se găseşte că valoarea sumei este

$$\frac{1712}{3^5.11}.$$

E. G. 464. Să se demonstreze că numărul de 12 cifre de forma aaaa4074aaaa *nu poate fi cub perfect pentru nicio valoare a lui* a.

GH. B.

Numărul dat se mai scrie

$$N = 1111 \times 10000001 \times a + 40740000.$$

Observăm că

$$40740000 = 11 \times 3703636 + 4.$$

Deci

$$(1) \qquad N = 11m + 4.$$

Față de divizorul 11, un număr M și cubul său sunt de următoarele forme corespunzătoare

M	$11m+0;\ +1;\ +2;\ +3;\ +4;\ +5;\ +6;\ +7;\ +8;\ +9;\ +10$
M^3	$11p+0;\ +1;\ +8;\ +5;\ +9;\ +4;\ +7;\ +2;\ +6;\ +3;\ +1$

Din acest tabel și din (1) se vede că dacă N ar fi cub, rădăcina sa ar trebui să fie de forma *mult.* 5 de unde se deduce

$$a = 0 \quad \text{sau} \quad a = 5.$$

Dar 40740000 nu este cub perfect pentrucă nu se termină prin un *mult.* 3 de zeruri, iar 555540740000 nu este cub perfect pentrucă se divide prin 5, fără a se divide și prin 5^3.

E. G. 465. Să se arate că ecuația

$$3x^3 + y = 3x^3y$$

nu este posibilă în numere întregi.

GH. B.

Se vede că y trebuie să se dividă și prin 3 și prin x^3, deci

$$y = 3mx^3.$$

Inlocuind și simplificând, rămâne

$$1 + m = 3mx^3$$

care arată ca $m = 1$, dar atunci

$$2 = 3x^3$$

care nu are soluții întregi.

E. G. 467. Care sunt numerele de o cifră, x și y, care satisfac relația:

$$\varphi(x),\ \varphi(y) = \varphi(x \cdot y)$$

$\varphi(n)$ fiind indicatorul lui n?

I. L.

Trebuie ca x și y să fie prime între ele.

E. G. 468. Să se arate că suma indicatorilor a trei numere consecutive este totdeauna inferioară triplului numărului cel mai mic.

I. L.

Fie $(n-1)$, n și $(n+1)$ cele trei numere și, fie, în cel mai defavorabil caz n par, atunci avem:

$$\varphi(n-1) < n-1 \quad ; \quad \varphi(n) \leqslant \frac{n}{2} \quad \text{și} \quad \varphi(n+1) < n+1.$$

Adunând, avem:

$$\varphi(n-1) + \varphi(n) + \varphi(n-1) < \frac{5}{2} \cdot n.$$

Dar

$$\frac{5}{2} n < 3(n-1) \quad \text{pentru} \quad n > 6.$$

Pentru $n \leqslant 6$ nu satisfac condiției numai numerele: 1, 2, 3.

I. L.

E. G. 469. Să se arate că avem:

$$4n \leqslant \sum_{1}^{n} [\varphi(i)]^2 \leqslant \frac{(n-1)\, n\, (2n-1)}{6}$$

$\varphi(i)$ *fiind indicatorul lui* i, *iar* $n \geqslant 5$.

I. L.

Observăm că:

$$\sum_{1}^{n-1} i^2 = \frac{(n-1) \cdot n \cdot (2n-2)}{6} > 1 + \sum_{1}^{n} [\varphi(i)]^2.$$

Apoi cum $\varphi(i) \geqslant 1$ avem:

$$\sum_{1}^{n} [\varphi(i)]^2 > n^2 > 4n \quad \text{pentru} \quad n > 4.$$

I. L.

E. G. 470. Forma

$$F \equiv 3v^2 - 3v + 1$$

dă un şir de numere prime.

Să se determine forma numărului v astfel ca numerele F *să fie divizibile cu 7; apoi cu 49.*

Aceeaşi chestiune pentru divizorul 13.

O. N. Ţ.

Scriind numărul F sub forma: $F \equiv 3v(v-1)+1$ se vede că el este un număr impar de forma $6p+1$, în care p este jumătatea produsului a două numere consecutive, deci el dă un şir de numere prime. Nu toate numerele de forma F sunt numere prime; de exemplu pentru $v = 6; 8$ numărul F nu este număr prim.

Pentru ca F să fie divizibil cu 7, este *necesar* şi *suficient* ca $v(v-1)$ să fie de forma $M7+2$, deci restul r al lui v prin 7 trebuie să satisfacă uneia din egalităţile

$$r(r-1) = M7 + 2.$$

Observăm însă că produsul a două resturi consecutive ale divizorului 7 poate să dea faţă de divizorul 7 resturile:

$$0,\ 2,\ 6,\ 5,\ 6,\ 2,\ 0,$$

deci r poate avea valorile $r = 2$; $r = 6$, adică forma F este M7 pentru

$$v = 7m + 2 \quad \text{sau} \quad v = 7m + 6$$

şi avem:

$$F_1 \equiv 7(21m^2 + 9m + 1) \quad \text{şi} \quad F_2 \equiv 7(21m^2 + 33m + 13).$$

Pentru ca formele F_1 şi F_2 să fie divizibile prin 49 trebuie în ambele cazuri:

$$m = 7p + 3$$

şi avem:

$$v = 49p + 23 \quad \text{şi} \quad v = 49p + 27$$

pentru care:

$$F_1 \equiv 49(147p^2 + 135p + 31) \quad \text{şi} \quad F_2 \equiv 49(147p^2 + 159p + 43).$$

Considerând acum divizorul 13, pentru ca $F \equiv 0 \pmod{13}$ trebuie ca $3v(v-1) \equiv 12 \pmod{13}$; deci ca $v(v-1) \equiv 4 \bmod 13$.

Dacă $v \equiv r \pmod{13}$, unde $r < 13$, trebuie ca $r(r-1) \equiv 4 \pmod{13}$.

Făcând produsul a două resturi consecutive ale divizorului 13, avem resturile:

$$0,\ 2,\ 6,\ 12,\ 7,\ 4,\ 3,\ 4,\ 7,\ 12,\ 6,\ 2,\ 0,$$

deducem de aci că $r = 6$ şi $r = 8$, deci $v = 13m + 6$ şi $v = 13m + 8$, pentru care avem:

$$F_1 \equiv 13\,(39m^2 + 33m + 7) \quad \text{şi} \quad F_2 \equiv 13\,(39m^2 + 45m + 13).$$

Apoi:

$F_1 \equiv 0 \pmod{13^2}$ pentru $m \equiv -1 \pmod{13}$ şi

$F_2 \equiv 0 \pmod{13^2}$ pentru $m \equiv 0 \pmod{13}$.

O. N. Ţ.

E. G. 471. Dacă v este prim cu 3, forma

$$F \equiv v^2 - 3v + 3$$

dă un şir de numere prime.

Să se determine forma lui v astfel ca numerele F *să fie divizibile cu* $7 \times 11 \times 13$.

O. N. Ţ.

Punând $v = u + 1$, avem $F \equiv u^2 - u + 1$; dar v prin ipoteză este prim cu 3, deci $v \equiv 1 \pmod 3$ sau $v \equiv 2 \pmod 3$ şi ca urmare $u \equiv 0 \pmod 3$ sau $u \equiv 1 \pmod 3$; rezultă că dând formei F expresia $F \equiv u(u-1) + 1$, numerele F sunt în acelaşi timp de forma $(6m + 1)$, care dă un şir de numere prime.

Aşa dar, forma F dă un şir de numere prime; nu însă ori ce număr de forma F, chiar pentru v prim cu 3, este un număr prim; exemplu, pentru $v = 11$, forma F dă numărul $91 = 7 \times 13$.

Pentru ca numărul F să fie astfel ca $F \equiv 0 \pmod{7 \times 11 \times 13}$, este necesar în primul rând să avem $F \equiv 0 \pmod 7$ de exemplu, iar pentru aceasta trebuie să avem:

$$u(u-1) \equiv 6 \pmod 7.$$

Făcând produsele a două resturi consecutive ale divizorului 7, avem următoarele resturi faţă de acest divizor:

$$0,\ 2,\ 6,\ 5,\ 6,\ 2,\ 0,$$

deci trebuie să luăm $u \equiv 3 \pmod 7$ sau $u \equiv 5 \pmod 7$, ca urmare $v \equiv 4 \pmod 7$ sau $v \equiv 6 \pmod 7$.

Pentru aceste valori ale lui v forma F devine:

$$F_1 \equiv (7m+4)^2 - 3(7m+4) + 3 \equiv 7(7m^2 + 5m + 1)$$

sau

$$F_2 \equiv (7m+6)^2 - 3(7m+6) + 3 \equiv 7(7m^2 + 9m + 3).$$

Pentru ca F_1 să fie divizibil cu 11, punând $\Phi_1 \equiv 7m^2+5m+1$, trebuie să avem $\Phi_1 \equiv 0 \pmod{11}$. Dacă $m \equiv r \pmod{11}$, unde $r < 11$, trebuie să avem: $7r^2 + 5r + 1 \equiv 0 \pmod{11}$, sau încă $2r^2 + 3r + 5 \equiv 0 \pmod{11}$, care n'are soluţie.

Pentru ca $F_2 \equiv 0 \pmod{11}$, punând $\Phi_2 \equiv 7m^2 + 9m + 3$, trebuie să avem $\Phi_2 \equiv 0 \pmod{11}$. Dacă $m \equiv r \pmod{11}$ şi $r < 11$ trebuie ca: $7r^2+9r+3 \equiv 0 \pmod{11}$, sau $2r^2+r+4 \equiv 0 \pmod{11}$, care n'are soluţie.

Aşa dar, v nu poate fi determinat astfel ca să avem: $F \equiv 0 \pmod{7 \times 11}$, deci *à fortiori* v nu poate fi astfel determinat ca să avem $F \equiv 0 \pmod{7 \times 11 \times 13}$.

O. N. Ţ.

Până la 1 Decemvrie 1942 s'au primit soluţii bune (la exerciţiile publicate în numerele 1, 2, 3 ale anului al IX-lea)(*) dela:

Liceul „Codreanu" Bârlad.

Clasa VI-a: Manoliu Sp. Mihai (VI: 635, 60, 4, 6, 746, 52).

Liceul de fete, Beiuş.

Clasa IV-a: Vala A. Ana (IV: 639, 40).

---

*) Numărul unui exerciţiu foarte bine rezolvat şi îngrijit redijat este însoţit de semnul *.

Liceul „Samuil Vulcan", Beiuş.

Clasa V-a: Teiuşanu I. Horia (V: 751, 2, 5; VII: 664, 6).

Clasa VI-a: Ardelean V. Aurel (VI: 746, 8, 52); Goldiş T. Gheorghe (VII: 655, 62, 7); Logăfătu M. Tănase (VI: 752; VII: 655, 62); Sasu I. Ion (E. G.: 472, 4*, 7, 8, 80, 2, 6).

Clasa VII-a: Cuc M. Alexandru (VII: 655, 62, 5, 7; VIII: 564, 5); Drimba E. Iosif (VII: 655, 6, 62, 4, 5, 6, 7; VIII: 564); Iova I. Ioan (VII: 655, 7, 62, 4, 5, 6, 7; VIII: 564, 5, 8, 9); Muţiu Antim (VII: 655, 6, 7, 62, 3, 4, 5, 6, 7; VIII: 564, 5); Scurtu V. Petre (VII: 655, 62, 4, 5, 6, 7; VIII: 564, 5).

Clasa VIII-a: Pat I. Moise (VIII: 564, 5, 6, 8, 9).

Şcoala Centrală de fete, Bucureşti.

Clasa VII-a: Duţă M. Silvia (VII: 564, 5); Teodorescu C. Maria (VII: 656, 7, 8, 62, 4); Zăgănescu N. Ivonne (VII: 655, 9*; VIII: 564, 5, 9).

Liceul de fete „Carmen-Sylva", Bucureşti.

Clasa IV-a: Maxim N. Maria Magdalena (IV: 639, 40).

Clasa VII-a: Damian C. Lucia (VII: 662, 4, 5; VIII: 564, 5); Maxim N. Viorica (VII: 664, 5); Stoicescu P. Viorica (VII: 662, 4, 5, 6, 7; VIII: 564, 5, 7, 8).

Clasa VIII-a: Georgescu I. Georgeta (VIII: 564, 5, 6, 8, 9).

Institutul de fete „Sf. Elena", Bucureşti.

Clasa VIII-a: Burculeţ M. Mihaela (VIII; 564*, 5, 6, 7, 8, 9, 70, 1, 5, 9; E. G.: 480, 6); Mititelu G. Rodica (VIII: 564, 5); Simion Gh. Mioara (VIII: 565).

Eleve particulare, Bucureşti.

Clasa VII-a: Burileanu O. Sanda (VII: 664: VIII: 565).

Liceul „Barbu Delavrancea", Bucureşti.

Clasa VII-a: Ghicon Gh. Ovidiu (VII: 664, 5, 6); VIII: 564, 5).

Liceul „Sf. Gheorghe" Bucureşti.

Clasa VIII-a: Miloiu I. Grigore (VIII: 568, 9, 70).

Liceul „Sf. Iosif" Bucureşti.

Clasa VIII-a: Mauro Remo (VIII: 564, 5, 6).

Liceul „Aurel Vlaicu", Bucureşti.

Clasa V-a: Leon Al. Mihail (V: 752*, 3*; VI: 749*).

Liceul „Cantemir Vodă", Bucureşti.

Clasa VI-a: Cociumian D. Anton (VI: 746).

Liceul „Spiru Haret", Bucureşti.

Clasa V-a: Mihalache M. Ştefan (V: 755, 6; VI: 748; VII: 655).
Clasa VII-a: Lazăr S. Luca (VII: 662, 5, 7; VIII: 564, 5).
Clasa VIII-a: Popovici Gr. Lucian (VIII: 566, 7, 8); Teodorescu Tr. Aristide (VIII: 564, 5, 6, 70, 1).

Liceul „Mihail Eminescu", Bucureşti.

Clasa VIII-a: Aron I. Gheorghe (VIII: 564, 5, 6, 7*; 8, 9, 70, 1).

Liceul „Gheorghe Lazăr", Bucureşti.

Clasa VII-a: Timotin Al. Alexandru (VII: 655; VIII: 564, 5, 7, 9).
Clasa VIII-a: Săftoiu I. Eliodor (VIII: 564, 5, 6, 8, 9*; E. G.: 478).

Liceul „Matei Basarab", Bucureşti.

Clasa VI-a: Ieşan Şt. Alexandru (VI: 746, 8, 9, 52; VII: 655, 6, 7, 8).
Clasa VII-a: Antonescu D. Eugen (VII: 657; VIII: 568); Dimitriu I. Mircea (VII: 655, 7, 62, 5, 7; VIII: 564, 5, 8).
Clasa VIII-a: Chirică C. M. Jean (VIII: 568).

Liceul „Titu Maiorescu", Bucureşti.

Clasa IV-a: Seni Gh. Dinu (IV: 636).
Clasa V-a: Corbaru A. Vladimir (V: 758).
Clasa VI-a: Stancu Z. H. (VI: 752*).
Clasa VII-a: Manasian M. Dragoş (VII: 655, 7, 62, 5; VIII: 565); Poenaru-Bordea M. Andrei (VII: 662, 5; VIII: 564, 5); Rădulescu T. Ad. (VIII: 564, 5).

Colegiul Naţional „Sf. Sava", Bucureşti.

Clasa IV-a: Dumitrescu F. Sorin (VI: 748*, 52*; VII: 655, 59; VIII: 564, 5, 6, 8, 9*).
Clasa VI-a: Dumitrescu I. (VI: 752); Georgeacopol E. Dan (VI: 746, 52, 6, VII: 655, 9, 64, 6); Soare V. Mircea (VI: 748*; VII: 655, 64, 6).
Clasa VII-a: Bâlcu Şt. Nicolae (VII: 655, 7*, 9; VIII: 564, 5); Horbuniev P. Vasile (VII: 665, 7; VIII: 564, 5, 8, 9); Mişicu M. (VII: 662, 4, 6, 7; VIII: 566, 70, 1); Nicola I. Corneliu (VII: 662, 3*, 4, 5, 6, 7); Nicolaescu Victor (VII: 662, 4, 5, 7; VIII: 564, 5; E. G.: 472).

Liceul „Gheorghe Şincai", Bucureşti.

Clasa VII-a: Ene Al. Ioan (VII: 655; VIII: 565).
Clasa VIII-a: Constantinescu I. Mihail (VIII: 564, 5, 6, 8, 70, 1*); Niculescu D. Pompiliu (VIII: 564, 5, 6, 8, 9, 71).

Liceul „B. P. Hasdeu", Buzău.

Clasa VII-a: Ionescu V. Ovidiu (VII: 655, 61, 2, 4, 5; VIII; 564, 5, 8); Petculescu D. Mircea (VII: 662, 3, 4, 5, 6, 7, 8; VIII: 567).

Liceul „Ştirbey Vodă", Călăraşi-Ialomiţa.

Clasa VI-a: Dumitrescu E. Ilie (VI: 756; VII: 655, 6, 7, 64, 6); Nicolescu I. Dumitrescu (VI: 749, 56, 7).

Clasa VII-a: Alexe D. Mihai (VII: 655; VIII: 564, 5).

Clasa VIII-a: Culea I. Dumitru (VIII: 564, 5, 6, 9); Dima N. Ştefan (VIII: 564, 5, 6, 7, 8, 9); Rădulescu V. Nicolae (VIII: 564, 5, 6, 9); Stoenescu Ioan (VIII: 564, 5, 6, 7, 8, 9).

Liceul „Ioniţă Assan", Caracal.

Clasa VII-a: Cârstea Stelian (VII: 662, 4, 5, 6; VIII: 564, 5, 9); Diaconescu I. Ioan (VII: 662, 5; VIII: 564, 5); Marinescu Gh. Ion (VII: 655, 6, 7, 9, 65); Safta R. Nicolae (VIII: 564, 5, 9).

Clasa VIII-a: Florescu I. M. (VIII: 578); Mustaţă C. Const. (VIII: 565, 8, 71, 8).

Liceul „Traian Doda", Caransebeş.

Clasa VI-a: Tudosie I. Horia (VI: 756; VII; 662, 5).

Clasa VII-a: Curcă M. Ionel (VII; 662, 5; VIII: 568).

Liceul Militar „Ştefan cel Mare", Cernăuţi.

Clasa V-a: Astalaş Traian (V: 756); Cârstea P. Stan (V: 755, 6); Cheşcă N. I. Stelian (V: 755, 6; VII: 664); Constantinescu Emil (V: 755, 6, 9); Fedoreac N. Mircea (V: 755, 6); Grigoraş Gh. Gh. (V: 755, 6, 8, 9); VII: 664); Grigorescu I. Nicolae (V: 758; VII: 664); Heniuc C. Raul V: 755, 6); Lozined I. Mircea (V: 755, 6; VII: 664); Marinescu C. Stelian (V: 755, 6, 8, 9; VII: 664, 6); Mihălceanu Şt. (V: 755); Negulescu D. Ionel (V: 751, 5, 6, 8, 9); Nicolescu C. Corneliu (V: 755, 6, 8); Pătrăşcanu Dimitrie (V: 755, 6); Petrea Aurel (V: 755, 6); Rădăcineanu D. Ovidiu (V: 755, 6); Silişteanu D. Dan (V: 755, 6, 8).

Clasa VI-a: Nicolaescu T. Viorel (VII: 664, 6).

Clasa VII-a: Balaş Ovidiu (VII: 661, 2, 4, 5, 6, 7, 8; E. G.: 486); Cândea N. Silviu (VII: 662, 4, 5, 6); Cimbru M. (VII: 657, 62, 3, 4, 5, 6, 7, 8; VIII; 569); Dumitrescu Gh. (VIII: 564, 5, 8, 9); Nicolaescu T. Ioan (VII: 657, 61, 2, 4, 5, 8); Popescu A. Gheorghe (VII: 664, 6, 7); Popescu Nicolae (VII: 657, 62, 3, 4, 5, 6, 7); Ranga Al. Constantin (VII: 656, 7, 62, 4, 5, 6); Soare Mircea (VII: 662, 4, 5, 6); Spirescu N. (VII: 662); Staicu C. (VII: 657, 8, 61, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8; VIII: 573); Tănase T. Gaius (VII: 662; VIII; 568); Teodorescu Alex. (VII: 662, 3, 4, 5); Zuzuleac Nicolae (VII: 662, 4, 5, 6, 7).

Clasa VII-a: BĂNESCU A. MIRCEA (VIII: 564, 5, 6, 7, 8, 73); BĂRBUCEANU N. GH. (VIII: 564, 5, 6, 8, 9); BUZEA VALERIU (VIII: 576); GANE S. POPA (VIII: 564, 5, 6, 8, 9); ISPAS C. ŞTEFAN (VIII: 569, 76, 86); MANOLIU ION (VIII: 566, 8); MARCU GRIGORE (VIII: 575, 6); PLEŞIU I. LUCINIU (VIII: 575, 64, 5, 6, 8, 9, 76); ŢAPU N. V. (VIII: 566, 8, 9, 75, 6).

Liceul „Mircea cel Bătrân", Constanţa.

Clasa VIII-a: TOMA M. VIRGILIU (VIII: 564*, 5, 6, 73, 5*, 6).

Liceul Militar „D. A. Sturdza", Craiova.

Clasa VI-a: CÂRSTEA D. MARIN (VI: 746; VII: 655, 9); POPA A. NICOLAE (VI: 746, 9; VII: 655).

Liceul „Ion Maiorescu", Giurgiu.

Clasa VIII-a: PALADA I. GRIGORE (VIII: 564, 5, 6, 8, 9, 70, 1).

Liceul „Oltea Doamna", Iaşi.

Clasa IV-a: ALBU D. AURELIA (IV: 629, 31, 2, 4, 5).

Liceul de Aplicaţie, Iaşi.

Clasa V-a: COSTĂCHESCU GH. CORNELIU (V: 755).
Clasa VII-a: GHEORGHIU N. ALEXANDRU (VII: 661, 2, 5); STRUGARIU GH. TIMOTEIU (VII: 659, 61, 2, 7; VIII: 568).
Clasa VIII-a: CUBAT H. AUREL (VIII: 564, 5*, 6, 7, 8, 9*, 70, 1).

Liceul Internat, Iaşi.

Clasa V-a: MARTA C. LIVIU (V: 755, 6, 7, 8).

Liceul „Naţional", Iaşi.

Clasa VIII-a: ŢIGĂNOIU I. ALEXANDRU (VIII: 564, 5, 6, 8, 9; E. G.: 472).

Liceul Militar, Iaşi.

Clasa IV-a: VLAD MIRCEA (V: 751*, 2*).
Clasa V-a: CONSTANTIN M. RADU (V: 757, 8).
Clasa VI-a: IGNAT GH. MIRCEA (VI: 747*),

Elevi Particulari, Mizil, etc.

Clasa VI-a: PIPIS L. NICOLAE (VI: 745, 6, 7*, 9; VII: 656, 7, 9, 61, 2, 7, 8).
Clasa VIII-a: IONESCU F. PETRE (VIII: 564, 5, 8, 9*).

Liceul „I. C. Brătianu" Piteşti.

Clasa VI-a: CIUVICĂ I. CORNELIU (VII: 655, 62, 4, 5, 6; VIII: 564, 5).

Liceul „Sf. Petru şi Pavel", Ploeşti.

Clasa VIII-a: Bauman Eduard (VIII: 564, 5, 6, 8, 9, 70, 1); Cătuneanu N. Traian (VIII: 564, 5, 6, 71); Moţoiu T. Costin (VIII: 559, 8, 71).

Colegiul Naţional Militar „N. Filipescu", Predeal.

Clasa VI-a: Marinescu C. Marinel (VII: 655, 6, 7).

Liceul „Regele Ferdinand", Râmnicu-Sărat.

Clasa VIII-a: Deşliu V. Ion (VIII: 565, 7, 8, 9).

Liceul „Enăchiţă Văcărescu", Târgovişte.

Clasa VIII-a: Alboteanu B. Vasile (VIII: 570, 1).

Liceul „Tudor Vladimirescu", Târgu-Jiu.

Clasa VII-a: Gâţă Gh. Gheorghe (VII: 658, 9*, 65; VIII: 564, 5, 9); Giurgoniu Gh. Gheorghe (VII: 655, 6, 62).

Liceul „C. Diaconovici Loga", Timişoara.

Clasa IV-a: Borda E. Radu (IV: 639, 40, 2*; V: 755); Nemoianu Constantin (IV: 639, 40).

Clasa VI-a: Constantinescu Şt. Mihai (VI: 746, 8*, 9*; VII: 664, 6*); Gajea G. Achim (VII: 655, 64, 6); Şerban M. Constantin (VI: 746, 8, 59*, 64, 6); Tincu C. Constantin (VI: 747, 8; VII: 655, 9*, 64, 6).

Liceul Militar „Mihai Viteazul", Timişoara.

Clasa IV-a: Costache M. Nicolae (IV: 642*); Orha Ion (IV: 642*); Stanciu V. Petre (IV: 640, 2).

Clasa V-a: Teodorescu At. Alexandru (V: 752, 3, 5, 6, 7, 8, 9; VI: 746; VII: 659*); Vrânceanu Gh. Gheorghe (V: 747*, 50, 5*, 6, 7, 8, 9; VI: 754*, 5*, 6; VII: 656, 7, 9*, 61, 4, 5, 6; E. G.: 486).

Clasa VI-a: Buzicu A. V. (VI: 752); Cârtoiu Gh. Nicolae (VI: 746, 8*; VII: 659, 64, 6); Dinu M. Petre (VI: 746, 56); Oprea D. Nifon (VI: 746, 8, 56; VII: 658, 9, 64, 6; E. G.: 472*); Pavica A. Victor (VI: 746*, 8, 56, 7*; VII: 660*, 4, 6); Popescu I. Barbu (VI: 746, 8*, 56; VII: 664, 6); Ţecu P. Traian (VI: 748; VII: 655, 6, 7); Valter C. Corneliu (VI: 748).

Clasa VII-a: Atanasiu A. Titus (VII: 655, 9*; VIII: 568, 9; Barbonik I. Theodor (VII: 655, 9*, 62, 4, 5, 7; VIII: 564, 5, 8); Căpriţă Gh. Ioan (VII: 656, 8, 9; VIII: 564, 5; Dumitrescu-Sătmar Dumitru (VII: 659, 64, 7; VIII: 564, 5, 7, 8); Enăchescu Gr. Ion (VII: 655, 6*, 7, 8*, 61; VIII: 564, 5, 8, 9*); Encuţescu P. Aurel (VII: 655*, 64*); Georgescu Teodor (VII: 655, 62, 7; VIII: 567, 8, 9); Hagău I. Eugen (VII: 655, 64, 5, 7*; VIII: 565, 8); Ionescu Gh. Gheorghe (VII: 667, 8); Mihalcu I. Ilie (VII: 655, 62;

VIII: 563*, 4, 5, 8*, 9); PĂLĂCEANU D. VASILE (VII: 655, 9*); PÂRVAN I. ION (VII: 655, 62, 4, 6, 7; E. G.: 472); STANCU M. ION (VII: 655, 9*; VIII: 568); STOICA P. MIHAI (VII: 655, 9*, 62, 4, 5, 6, 7; VIII: 564, 5, 8, 9).

Clasa VIII-a: OPREA D. GHEORGHE (VIII: 564, 5, 6, 7, 8*, 9, 76; E. G.: 472*, 86); PÂNTEA TUDOR (VIII: 564, 5, 7, 8, 9 76; E. G.: 472*, 84); PETRESCU ELIZEU (VIII: 565, 6, 8, 9); RĂDOIU N. NICOLAE (VIII: 564, 5, 6, 7, 8, 9, 70*, 6; E. G.: 472).

Liceul „Traian", Turnu-Severin.

Clasa IV-a: SĂLĂGEANU I. TRAIAN (IV: 639, 40).

Clasa VI-a: DRĂCEA I. MIHAI (VI: 749; VII: 655, 9*); SĂBIESCU C. STELIAN (VI: 746; VII: 655).

Clasa VII-a: BOGDAN P. CONSTANTIN (VII: 662, 4*, 7); DUMITRESCU GH. TRAIAN (VII: 662, 4, 5, 6*, 7); GÂDEA I. A. (VII: 662, 4*, 5, 6*, 7*, 8); LUNGULESCU C. PETRE VII: 662, 4, 5, 6, 7; VIII: 565, 8, 9*).

Clasa VIII-a: BOLTAŞU N. IOAN (VIII: 564, 5, 6, 8, 9); CECIU I. MIHAI (VIII: 564, 5, 6, 8, 9); CORDONESCU I. DUMITRU (VIII: 565, 6, 8, 9); DORNBACH GH. OCTAVIAN (VIII: 566, 8); GHIONEA A. CORNELIU (VIII: 564, 5, 6).

Liceul teoretic de fete, Turnu-Severin.

Clasa VIII-a: POPESCU I. AURELIA (VIII: 568, 9).

EXERCIŢII PROPUSE

Soluţiile exerciţiilor propuse în acest număr se primesc până la 1 Aprilie 1943

Clasa III-a. *Exerc. 219.* Un inel făcut dintr'un aliaj de argint şi cositor are greutatea de 5 gr. şi titlul 0,460. Preţul argintului este proporţional cu patratul greutăţii sale, iar un gram de argint costă 500 lei.

Care este preţul argintului conţinut în acel inel?

V. GH.

III. 220. Se dă un patrat ABCD cu centrul O. Construim cercurile AOB, BOC, COD, DOA; apoi pe laturile AB, BC, CD, DA punctele *b*, *c*, *d*, *a* astfel ca

$$\overline{Bb} = \overline{Cc} = \overline{Dd} = \overline{Aa} = \frac{1}{4}\overline{AB}.$$

Fie A′, B′, C′, D′ punctele de pe cele patru cercuri, exterioare patratului dat, care se proiectează în *a*, *b*, *c*, *d*; iar A″, B″, C″, D″ intersecţiile perechilor de drepte (D′*d*, A′*a*), (A′*a*, B′*b*), (B′*b*, C′*c*), (C′*c*, D′*d*).

a) Să se arate, că:

1°. patrulaterul A′B′C′D′ este un patrat.

2°. patrulaterul A″B″C″D″ este un patrat, iar vârfurile lui se găsesc pe diagonalele patratului dat ABCD.

b) Să se calculeze:

1°. aria patratului A′B′C′D′ cu o aproximaţie de 0,01, latura patratului dat fiind: $\overline{AB} = 32$ cm.

2°. raportul ariei patratului A″B″C″D″ către aria patratului dat.

c) Să se deducă aria patratului *abcd*, fără a i se calcula lungimea laturii lui.

O. N. Ţ.

III. 221. Fiind dat triunghiul isoscel BAC ($\overline{AB} = \overline{AC}$) construim înălţimile lui $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ şi fie H punctul lor de întâlnire. Prelungim pe $\overline{HB'}$ cu un segment $\overline{B'M}$ egal cu $\overline{HB'}$. Să se arate, că triunghiurile HAM şi BAC sunt asemenea şi să se găsească raportul lor de asemănare, ştiind că $\overline{AB} = 3{,}14$ m şi $\overline{BC} = 5{,}28$ m.

O. N. Ţ.

Clasa IV-a. *Exerc. 647.* Să se simplifice fracţia algebrică:

$$\frac{\left[1-\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2\right]^2}{\frac{(x+1)^2}{4x}\cdot\left[1+3\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2\right]^2}.$$

I. I. S.

IV. 648. Să se arate, că, oricare ar fi valorile lui x şi y, avem:

$$\frac{\frac{x^2-1}{x^2+1}+\frac{y^2-1}{y^2+1}}{\frac{2x}{x^2+1}+\frac{2y}{y^2+1}}+\frac{\frac{2x}{x^2+1}-\frac{2y}{y^2+1}}{\frac{x^2-1}{x^2+1}-\frac{y^2-1}{y^2+1}}=0.$$

I. I. S.

IV. 649. Să se arate, că nu sunt decât trei spețe de piramide regulate, care au muchia laterală egală cu muchia bazei; deci că sunt numai trei spețe de corpuri geometrice cu toate fețele triunghiuri echilaterale.

O. N. Ț.

IV. 650. Se dă o piramidă regulată cu baza un patrat, având înălțimea egală cu jumătate din latura bazei. Să se calculeze:

a) Muchiile laterale ale piramidei.

b) Unghiul pe care fețele laterale îl fac cu planul bazei.

Să se deducă apoi, că șase piramide egale cu aceea dată formează un cub.

O. N. Ț.

Clasa V-a. *Exerc. 765.* Să se arate că expresia

$$E \equiv x^{2n+2} \cdot (x^{4n+1} - 3 \cdot x^{2n} + 3x) - 1$$

se împarte exact prin $(x-1)^3$. Să se afle câtul.

I. I. S.

V. 766. Fie un cerc (O); două puncte A, B pe acest cerc. Tangentele la cercul (O) în punctele A, B se întâlnesc în P. Să se demonstreze, că mijlocul arcului AB este centrul cercului înscris în triunghiul PAB.

V. Gh.

V. 767. Fiind dat triunghiul isoscel BAC ($\overline{AB} = \overline{AC}$), construim înălțimile $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ și fie H punctul lor de întâlnire. Prelungim pe $\overline{BB'}$ cu segmentul $\overline{B'M}$ egal cu $\overline{HB'}$. Să se arate, că triunghiurile ABC și AHM sunt asemenea.

Cunoscând lungimile laturilor triunghiului dat, anume

$$\overline{AB} = m^2 + n^2 \quad , \quad \overline{BC} = 4mn,$$

să se determine raportul de asemănare al acestor două triunghiuri asemenea.

O. N. Ț.

V. 768. Să se simplifice fracţia algebrică:

$$F \equiv \frac{\Sigma ab(c+a)(b^2+c^2) - \Sigma ab(b+c)(c^2+a^2)}{\Sigma ab^3(b+c) - \Sigma ac^3(b+c)}.$$

I. I. S.

V. 769. Pe un segment de dreaptă AB luăm un punct C, astfel ca $\overline{AC} = a$. Perpendiculara ridicată în C pe AB taie semicercul (O), construit pe $\overline{AB}$ ca diametru, în D, iar coarda AD prelungită taie tangenta în B, la semicerc, în P. Fie $\overline{PM}$ a doua tangentă dusă din P la cercul (O). Să se calculeze distanţele punctului M, de contact, la cele trei puncte A, B, C, ştiind că $\overline{AB} = a + b$.

O. N. Ţ,

Clasa VI-a. *Exerc. 764.* Intr'un triunghiu oarecare avem relaţia:

$$4a^2 \operatorname{tg}\frac{A-B}{2} \operatorname{cotg}\frac{C}{2} = (a^2-b^2)\left[\operatorname{tg}\frac{A-B}{2} + \operatorname{cotg}\frac{C}{2}\right]^2.$$

I. I. S.

VI. 765. Să se arate că într'un triunghiu oarecare avem relaţiile:

1°. $a \sin A (b + \sin B)^2 = b \sin B (a + \sin A)^2$

2°. $(a \sin A + b \sin B)^2 = (a^2 + b^2) \cdot (\sin^2 A + \sin^2 B)$.

I. I. S.

VI. 766. Pe perpendiculara în A la segmentul de dreaptă AB se iau punctele A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 aşa încât:

$$\sphericalangle BA_iA - \sphericalangle BA_{i-1}A = 15^0.$$

Să se calculeze cu două zecimale exacte valorile numerice ale segmentelor $AA_1, AA_2, \ldots, AA_5$; $BA_1, BA_2, \ldots, BA_5$ pentru $\overline{AB} = 1$.

Gh. B.

VI. 767. Se dă o piramidă regulată în care muchia laterală este egală cu muchia bazei şi fie r raza poligonului regulat de bază.

Să se găsească relaţiile trigonometrice, care dau unghiul φ a două feţe laterale şi unghiul θ al unei feţe laterale cu baza piramidei.

O. N. Ţ.

VI. 768. Dacă α, β, γ sunt unghiurile, pe care medianele AA', BB', CC' le fac respectiv cu laturile AB, BC, CA în triunghiul ABC, avem relaţia:

$$\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta + \operatorname{cotg}\gamma = 3\,(\operatorname{cotg}A + \operatorname{cotg}B + \operatorname{cotg}C).$$

O. N. Ţ.

VI. 769. In triunghiul oarecare ABC se construieşte cercul înscris (I) şi fie A', B', C' punctele de contact cu laturile BC, CA, AB, iar α, β, γ unghiurile, pe care cevienele AA', BB', CC' le fac respectiv cu laturile AB, BC, CA. Să se calculeze tangentele trigonometrice ale acestor unghiuri în funcţie de laturile triunghiului dat.

O. N. Ţ.

Clasa VII-a. *Exerc. 676.* Să se studieze variaţia funcţiei:

$$y = \frac{(x+4)\,(2x+1)^2}{4x}$$

şi să i se construiască curba reprezentativă.

GH. B.

VII. 677. Ştiind că $b^2 = 2ac$, să se studieze variaţia funcţiei:

$$y = \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}$$

şi să se construiască curba reprezentativă a acestei variaţii în toate cazurile.

O. N. Ţ.

VII. 678. Să se studieze variaţia funcţiei:

$$y = \frac{3ax^2 + 2bx + c}{ax^3 + bx^2 + cx + d}$$

ştiind că numerele a, b, c, d sunt legate prin relaţiile:

$$2b^2 = 3ac \quad ; \quad c^2 = 2bd.$$

Să se construiască curba reprezentativă a variaţiei funcţiei y, când $a = 1$, $b = 3$, $c = d = 6$.

O. N. Ţ.

VII. 679. Intr'un patrulater dat ABCD se înscrie un paralelogram MNPQ, având laturile paralele cu diagonalele patrulaterului dat.

Să se studieze variaţia suprafeţei paralelogramului MNPQ şi să se enunţe rezultatul obţinut.

O. N. Ţ.

VII. 680. Să se studieze variaţia funcţiei:

$$y = \pm \sqrt{\frac{x^2 - 4x}{x^2 - 4}}$$

şi să se construiască curba reprezentativă.

O. N. Ţ.

VII. 681. Fie SAB un con circular drept; I centrul cercului (MN) de secţie paralel cu cercul (O) de bază; (PQ) proiecţia ortogonală a cercului (MN) pe planul cercului de bază (O).

Să se studieze variaţia suprafeţei totale a cilindrului MNPQ.

O. N. Ţ.

VII. 682. Se dă o sferă (O) de rază R, un punct fix A pe sfera (O) şi o sferă variabilă (I), tangentă sferei (O) în punctul A. Conul cu vârful O şi circumscris sferei (I) taie sfera (O) după cercul (NN') cu centrul în P. Să se studieze variaţia *suprafeţei totale* a conului ONN'.

O. N. Ţ.

Clasa VIII-a. *Exerc. 588.* Se dau pe o axă punctele $A(a)$; $B(a+b)$; $C(a+2b)$; $D(a+3b)$. Fie A', B', C' punctele care împart segmentele AB, BC, CD respectiv în rapoartele: λ, $\lambda+b$, $\lambda+2b$.

Să se determine λ astfel ca B' să fie mijlocul lui A'C'.

Câte soluţii reale se găsesc?

C. I. B.

VIII. 589. Se dă cercul:

$$x^2+y^2-6\alpha x+(\alpha+6)y-\alpha=0.$$

Să se determine α astfel ca polara originii axelor, faţă de acest cerc, să fie paralelă cu prima bisectoare a unghiului axelor de coordonate. Când α variază, polara trece printr'un punct fix.

C. I. B.

VIII. 590. Se dau în plan o elipsă (E) şi o dreaptă Δ perpendiculară pe una din axele elipsei. Fie M un punct mobil pe elipsa (E). Să se scrie ecuaţia locului mijlocului perpendicularei din M pe dreapta (Δ).

GH. B.

VIII. 591. Se dă un cerc (O) de rază R, o dreaptă (D) şi o direcţie (Δ) înclinată pe (D) de 45°. Se proiectează un punct M al cercului (O) paralel cu (Δ) pe dreapta (D) în N şi fie P mijlocul segmentului MN. Care este locul punctului P, când M se mişcă pe cercul (O). Să se construiască acest loc.

(Se vor alege axele de coordonate potrivit cu felul problemei).

O. N. Ţ.

VIII. 592. Să se studieze intersecţia curbelor:

$$9x^2+y^2-9=0 \qquad (E)$$

$$(x-4)^2+(y-\mu)^2-9=0 \qquad (C)$$

O. N. Ţ.

VIII. 593. Să se cerceteze natura rădăcinilor ecuației:

$$50x^6 + 20\lambda x^3 - 15x^2 - 12\lambda x + 10 = 0 \qquad (1)$$

știind că λ este un parametru putând avea valori reale între $-\infty$ și $+\infty$.

Să se separe rădăcinile reale ale ecuației (1) în cazurile particulare $\lambda^2 = 1$.

O. N. Ț.

VIII. 594. Să se arate că ecuația:

$$x^9 + x^4 + 2x^2 + 1 = 0$$

are o singură rădăcină reală și să se calculeze această rădăcină cu o aproximație de 0,01.

O. N. Ț.

VIII. 595. Să se arate că ecuația:

$$x^9 - x^4 + 2x^2 + 1 = 0$$

are trei rădăcini reale și să se determine intervalele în care se află aceste rădăcini reale.

O. N. Ț.

Exerciții generale. *Exerc, 499.* Să se demonstreze că expresia:

$$E \equiv 5^{2n+3} + 36887 \cdot 215^n$$

este divizibilă cu 19, oricare ar fi n întreg.

V. Gh.

E. G. 500. Suma inverselor puterilor de exponent m a tuturor divizorilor unui număr dat este egală cu suma puterilor de același exponent m a tuturor divizorilor împărțită prin puterea a m a numărului dat.

I. L.

E. G. 501. Să se arate că expresia:

$$\frac{(2.11.31)!\ 11!\ 31!}{(2.11)!\ (2.31)!\ (11.31)!\ 2^{10\cdot 30-1}.11^{30}.31^{10}}$$

este întreagă.

I. L.

E. G. 502. Numărul divizorilor unei puteri este prim cu exponentul puterii.

I. L.

E. G. 503. Să se arate că, produsul numerelor prime cu N și mai mici ca el, pentru $N = a^3b$, este mai mic decât:

$$(N-1)!\,/\,N^3.$$

I. L.

E. G. 504. Să se arate că, dacă $P_x(y)$ reprezintă produsul numerelor prime cu y, din șirul numerelor naturale până la x, atunci avem:

$$P_{2A}(N) > 2 . P_A(N).$$

I. L.

E. G. 505. Să se calculeze produsul numerelor prime cu 210 din șirul numerelor consecutive dela 50 la 100.

I. L.

E. G. 506. Știind că $\varphi(n)$ este indicatorul lui n atunci avem:

$$\varphi[a^{\varphi(n)} - 1] = \mathcal{M}\varphi(n).$$

I. L.

E. G. 507. Dacă p este un număr prim absolut, iar a un număr oarecare nedivizibil cu p, atunci:

$$\varphi[a^{p-1} - 1] = \mathcal{M}(p-1),$$

unde $\varphi(i)$ reprezintă indicatorul lui i.

I. L.

INSTRUCȚIUNI

Pentru redactarea și trimiterea soluțiunilor exercițiilor publicate în *Gazeta Matematică Supliment cu exerciții* se vor avea în vedere *Instrucțiunile* publicate în numerele 1, 2, 3 pe copertă.

Drepturile de reproducere rezervate Societății «Gazeta Matematică».

Elevii claselor VI, VII și VIII, cu bogată activitate la această revistă își pot lărgi cadrul activității rezolvând probleme din „Gazeta Matematică".

In Biblioteca Societății „Gazeta Matematică" au apărut și se găsesc următoarele:

VII. **Gh. Lazăr,** *Trigonometrie drept liniară* (după cursul predat de **Gh. Lazăr** la colegiul Sf. Sava). . . . . Lei 10

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu și G. Țițeica,** Vocabular Matematic . . . . . Lei 20

X. **G. Țițeica,** Culegere de Probleme de Geometrie . . . . Lei 220

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. Istoric, învățăminte. Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 300 / pentru abonații G. M. și S. G. M. . . Lei 150

XII. **V. Cristescu,** Culegere de Probleme de Trigonometrie. Partea I. (Goniometrie) revăzută și adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . Lei 140

XIII. **I. Ionescu,** Culegere de Probleme de Aritmetică. Partea I. Aritmetica rațională . . . . . Lei 250

XIV. **V. Cristescu,** Culegere de Probleme de Trigonometrie. Partea I-a. (Trigonometrie plană). Ediția II-a revăzută și adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 140

XV. **A. G. Ioachimescu,** Culegere de Probleme de Algebră. Partea I. Ediția IV-a revăzută și mărită . . . . . Lei 170

XVI. **G. Țițeica,** Culegere de Probleme de Geometrie Analitică. Partea I. Ediția II-a, adăogită de *N. G. Botea* . . . . . Lei 230

XVII. **A. G. Ioachimescu,** Culegere de Probleme de Algebră. Partea II-a. Ediția IV-a, revăzută și mărită . . . . . Lei 350

Biblioteca Istorică a GAZETEI MATEMATICE

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărțile I — VI de Geometrie plană) tradusă din limba greacă de *V. Marian* . . . . . Lei 250

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărțile VII—IX de Aritmetică și Cartea X a Iraționalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . Lei 300

III. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărțile XI—XIII de Geometrie în spațiu; Cartea XIV a lui HYPSICLE și Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian**. . . . . Lei 200

Biblioteca Matematică „GEORGE ȚIȚEICA"

I. **Ion Ionescu,** *Maxime și minime geometrice* . . . . . Lei 160

Suplimentul cu Exerciții. Abonamentul anual (9 numere) . . . Lei 100

„Gazeta Matematică" apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 300 lei anual, se plătește înainte și începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului și nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele și toată corespondența se trimite pe adresa:

Societății „GAZETA MATEMATICĂ"

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviței No. 158. — București 2.

(Telefon: 3-9803).

M. O., IMPRIMERIA NAȚIONALĂ. — C. 84.416

GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCIŢII

ANUL IX. No. 5 1 FEBRUARIE 1943

BIBLIOTECA CENTRALĂ
„ASOCIAŢIUNEA"
SIBIIU

SOCIETATEA GAZETA MATEMATICĂ
CALEA GRIVIŢEI. 158. BUCUREŞTI 2. — TELEFON 3-9803

GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCIŢII

ANUL IX. No. 5 — 1 FEBRUARIE 1943

ABONAMENTUL LEI 100 PE AN (9 numere)

Soluţii şi orice corespondenţă pe adresa:

Casa «Gazeta Matematică», Calea Griviţei 158. — Bucureşti 2

CONCURS DE MECANICĂ

(Regulamentul concursului a apărut în Nr. 3 al Suplimentului)

1. Un mobil parcurge o traiectorie rectilinie după legea

$$s = kt^2 - (4 - k)\,t + 2$$

unde k este un parametru. Să se determine viteza şi acceleraţia punctului pentru diferite valori ale parametrului ($k = 0$, $k = 4$), t variind dela O la ∞. Să se traseze pentru aceste valori ale lui k diagramele $s = f_1(t)$; $v = f_2(t)$, $\gamma = f_3(t)$, unde s = spaţiu, v = viteza, γ = acceleraţia mobilului.

2. Fie un plan înclinat AB făcând $\sphericalangle \alpha$ faţă de orizontală, de lungime $AB = 2a$. Din punctul cel mai de sus A se dă drumul unui mobil să lunece fără viteză iniţială. Din punctul C pe orizontala lui A şi pe verticala lui M (M este la jumătatea planului inclinat), se dă drumul unui punct material astfel încât să lovească pe primul în M. Când trebuie dat drumul acestui al 2-lea mobil? Cu ce viteză iniţială ar trebui lansat pe planul înclinat un punct material din B, pentru a ciocni în acelaşi timp în M celelalte 2 mobile, el fiind lansat în acelaşi timp cu mobilul din C.

3. Se dau 2 traiectorii rectilinii AB şi AC făcând între ele în A un $\sphericalangle \alpha$. Pe AB se mişcă un mobil P_1 cu viteză constantă pornind din A. Pe AC, pornind din M ($AM = l$) se mişcă un al 2-lea mobil P_2 astfel încât $P_1P_2 = \text{const} = l$. Să se determine viteza şi acceleraţia lui P_2.

4. Un punct material parcurge parabola $y^2 = 4x + 9$ cu viteza constantă $2^m/_{sec}$. Să se determine componentele vitezei pe cele 2 axe Ox şi Oy, în punctul în care parabola intersectează dreapta $y = 3$.

5. Fie un cerc de rază $R = 2$. Dintr'un punct A al său porneşte un mobil cu mişcare astfel încât $v = 6t + 2$. Să se determine, după ce a parcurs un sfert de cerc cât va fi viteza şi acceleraţia totală a acestui mobil.

6. Fie un cerc ABCD de diametru $AB = 8$ m. Pe semicercul superior ACB se mişcă un mobil fără viteză iniţială cu acceleraţia tangenţială $\gamma_y = 3^m/_{sec^2}$ pornind din A. Pe semicercul inferior ADB, plecând tot din A porneşte alt mobil cu viteză iniţială v_0 şi aceeaşi acceleraţie tangenţială $\gamma_y = 3^m/_{sec^2}$. Se întreabă cât trebuie să fie v_0 pentru ca acceleraţiile totale ale acestor 2 mobile să fie perpendiculare una pe cealaltă în punctul B şi care e valoarea acestor acceleraţii.

EXERCIŢII REZOLVATE

Exerciţii generale. *E. G. 473. Să se găsească două numere de câte patru cifre, ştiind că ele sunt scrise cu aceleaşi cifre şi că diferă între ele cu 18.*

GH. B.

Fie $M = abcd$ şi $N = abcd + 18 = \alpha\beta\gamma\delta$ numerele căutate, unde $\alpha\beta\gamma\delta$ este una din permutările cifrelor a, b, c, d.

Majoritatea numeroşilor corespondenţi, care s'au ocupat cu acest exerciţiu, au plecat dela premiza *falşă* că M şi N încep cu acelaşi cifre $ab = \alpha\beta$. Unii au enumărat, fără demonstraţie un număr redus de soluţii, şi câţi-va au afirmat că exerciţiul *nu are soluţii.*

Pentru îndrumare, dau în cele ce urmează soluţia complectă şi dezvoltată a exerciţiului.

Soluţia I. Dacă se notează cu P_i una din cele 24 permutări ale literelor a, b, c, d, problema revine la o rezolva în numere întregi, mai mici decât 10, ecuaţiile

$$abcd + 18 = P_i.$$

Exemple. 1. Fie $P_i = abdc$. Atunci

$$abcd + 18 = abdc \quad \therefore \quad c + 2 = d \quad \therefore \quad c < 8$$

şi soluţiile problemei sunt

$$M = abc(c+2) \;,\; N = ab(c+2)c \quad \text{cu} \quad c < 8.$$

2. Fie $P_i = adcb$. Atunci

$$abcd + 18 = adcb$$

$$\therefore \quad 11b + 2 = 11d$$

care este o imposibilitate. Deci nu avem soluție.

3. Fie $P_i = adbc$. Avem

$$abcd + 18 = adbc$$

$$\therefore \quad 10b + c + 2 = 11d$$

sau $$10b + c + 2 - d = 10d$$

care necesită

$$c + 2 - d = 0 \quad \therefore \quad d = c + 2 = b$$

sau $$c + 2 - d = 10 \quad \therefore \quad c - d = 8.$$

Prima dă soluțiile

$M = ab\,(b-2)\,b \qquad N = abb\,(b-2)$ cu $b \geqslant 2$.

A doua dă

$c = 8$, $d = 0$ fără soluție pentru b

și $c = 9$, $d = 1$ cu $b = 0$ deci soluțiile

$M = a091$ și $N = a109$.

Și așa mai departe.

Soluția II. Examinarea atentă a operațiilor de adunare evită rezolvarea celor 24 de ecuații. Iată cum:

După enunț avem

$$abcd + 18 = \alpha\beta\gamma\delta$$

unde α, β, γ, δ sunt tot cifrele a, b, c, d într'o ordine oarecare.

Efectuând adunarea avem

$$d + 8 = 10 + \delta < 18 \quad \text{sau} \quad d + 8 = \delta < 10$$

cărora corespunde

$c+1+1 = 10+\gamma$, $c+1+1 = \gamma$ sau $c+1 = 10+\gamma$, $c+1 = \gamma$.

Deosebim deci 3 cazuri: $c < 8$, $c = 8$, $c = 9$.

Cazul I. $c < 8$, înseamnă că $ab = \alpha\beta$ și avem de rezolvat ecuația

$$abcd + 18 = abdc$$

care dă soluțiile

$$M = abc\,(c+2) \quad , \quad N = ab\,(c+2)\,c$$

dela 1) soluția I.

Cazul II. $c = 8$, dacă $d + 8 < 10$ suntem în cazul I. Dacă însă $d + 8 > 10$ atunci avem

$$ab8d + 18 = \alpha\,(b + 1)\,0\gamma.$$

Aici putem avea $b = 9$ sau $b < 9$.

Dacă $b = 9$, atunci

$$a98d + 18 = (a + 1)\,00\gamma$$

care evident nu este soluție, căci ar trebui ca

$$a = d = 0$$

și $0980 + 18$ nu se scrie cu aceleași cifre ca 0980.

Dacă $b < 9$ atunci

$$ab8d + 18 = a\,(b + 1)\,0\gamma$$

de unde rezultă $d = b + 1$ și $\gamma = b$, ceea ce ar atrage

$$ab8\,(b + 1) + 18 = a\,(b + 1)\,0b$$

care este imposibilă căci $b + 1 + 8$ nu se poate termina cu b, oricare ar fi b.

Cazul III. $c = 9$, $\therefore$ $b + 1 \leqslant 10$ deci $b = 9$ sau $b < 9$.

Când $b = 9$ avem

$$a99d + 18 = (a + 1)\,00\gamma \quad \text{sau} \quad a99d + 18 = (a + 1)\,01\gamma.$$

Prima este evident imposibilă, a doua atrage

$$a + 1 = \gamma = 9 \quad \therefore \quad 8999 + 18 = 9007$$

care nu este soluție.

Când $b < 9$ atunci

$$ab9d + 18 = a\,(b + 1)\,0\delta \quad \therefore \quad b + 1 = d \quad \text{și} \quad \delta = 9$$

deci $d = 1$, $b = 0$ și avem soluțiile

$$a091 + 18 = a109$$

sau încă $b + 1 = 9$ $\therefore$ $b = 8$ și avem

$$a89d + 18 = a908.$$

Sub cazul $b < 9$ mai poate da

$$ab9d + 18 = a\,(b + 1)\,1\delta$$

ceea ce înseamnă sau $b + 1 = 9$ sau $\delta = 9$, nici una nici alta din aceste egalități nu dau însă soluții.

Centralizând rezultatele, problema are următoarele 3 grupe de soluţii:

Grupa I: $M = abc(c+2)$, $N = ab(c+2)c$, cu $c < 8$

Grupa II: $M = a091$, $N = a109$

Grupa III: $M = a890$, $N = a908$.

După cum se vede în grupele II şi III, M şi N nu încep cu acelaşi număr de 2 cifre.

Numărul total de soluţii. Socotind că numerele de forma $0b$ (oricare ar fi b) sunt numere de 2 cifre atunci se găseşte uşor că în grupa I la fiecare din cele 10 valori 0, 1, ... 9 ale lui b se pot lua pe rând cele 10 valori 0, 1, ... 9 ale lui a, iar la fiecare din cele 100 valori ale grupei ab luând pe rând cele 8 valori 0, 1, ... 7 ale lui c, vom avea 800 soluţii, pe când în grupele II şi III vom avea câte 10 soluţii corespunzătoare celor 10 valori 0, 1, ... 9 ale lui a. Deci în total problema are *820 soluţii* din care 82 sunt formal de 4 cifre, căci încep cu zero.

E. G. 474. Câte soluţii în numere întregi are ecuaţia

$$x + y = a$$

a *fiind un număr întreg dat.*

GH. B.

Avem $x = a - y$

unde y poate lua valorile 0, 1, 2, ..., $a - 1$, a, iar x valorile a, $a - 1$, ... 2, 1, 0. Deci în total $a + 1$ soluţii.

Până la 1 Ianuarie 1943 s'au primit soluţii bune (la exerciţiile propuse în numerele 2, 3, 4 ale anului al IX-lea)(*) dela:

Liceul de fete, Arad.

Clasa VIII-a: VĂRSĂNDAN VETURIA (VIII: 568, 9).

Liceul „Moise Nicoară", Arad.

Clasa VI-a: ŞCHIOPU R. ION (VI: 746, 9).

Clasa VIII-a: COLAN GH. HORIA (VII: 655, 9, 62, 4, 5, 6, 7, 9, 71*; VIII: 564, 5*, 6, 7*, 8, 9*). TODOR I. LIVIU (VII: 655, 6, 9).

Clasa VIII-a: POPOVICIU F. TEOFIL (VIII: 564, 5, 6, 8, 9).

---

*) Numărul unui exerciţiu foarte bine rezolvat şi îngrijit redijat este însoţit de semnul *.

Liceul „Regele Ferdinand I", Bacău.

Clasa VII-a: Fânaru N. Dumitru (VII: 655, 60, 2, 4, 5, 6, 7; VIII: 564, 5, 8, 9*).

Liceul „Samuil Vulcan", Beiuș-Bihor.

Clasa III-a: Pantea N. Alexandru (III: 213, 4, 6).

Clasa V-a: Costea D. Florian (V: 751, 2: VI: 746): Tulvan V Mircea (V: 751, 2, 5).

Clasa VI-a: Sasu I. Ion (VI: 746, 8, 9, 52, 4; VII: 655, 6, 9, 62, 4, 6, 8; E. G.: 491, 3).

Liceul „N. Bălcescu", Brăila.

Clasa VI-a: Avram Gh. Cristache (VI: 746*; VII; 655, 59, 64, 66): Boerescu I. N. Cezar (VI: 746, 8, 9, 52, 3, 4, 6*, 8, 60; VII: 655, 7, 9, 64, 6; E. G.: 472, 7, 80, 2, 5, 6, 90, 3, 8); Constantinescu N. Ilie (VI: 746, 7, 9, 56, 9, 60); VII, 655, 6, 7, 9, 64, 6; E. G.: 472, 82); Ionescu G. Eugen (VI: 746; VII: 655, 9, 64); Fanciotti E. Silvio (VI: 747, 8; VII: 655, 9; E. G.: 472); Podeanu C. Stelian (VI: 746, 8; VII: 655, 9, 64).

Liceul „Dr. Ioan Meșotă", Brașov.

Clasa IV-a: Ionescu I. S. Ioan (IV: 639).

Liceul de fete „Iulia Hasdeu", București.

Clasa III-a: Barbu C. Ana (III: 211).

Școala Centrală de fete, București.

Clasa VIII-a: Reșa E. Rodica (VII: 655, 7, 8; VIII: 564, 5, 9); Rovența I. Gh. Ana (VII: 657; VIII: 569); Sireteanu C. Elena (VII; 662, 5, 7).

Liceul de fete „Carmen-Sylva", București.

Clasa VII-a: Damian C. Lucia (VIII: 567, 8); Diaconescu I. Natașa (VII: 659, 62, 4, 6); Mateescu C. Virginia (VII: 666; VIII: 568); Maxim N. Viorica (VII: 662, 7, 71); Stoicescu P. Viorica (VII: 665, 8, 71).

Institutul „Sf. Maria", București.

Clasa V-a: Dimos H. Elvira (V: 751, 5).

Liceul „Aurel Vlaicu", București.

Clasa IV-a: Săbăreanu Șt. Valentina (IV: 639); Teodorescu O. Elena (IV, 627, 36, 8).

Clasa V-a: Barbaiani A. Mihai (V: 751, 2, 3; VII: 748, 9; E. G.: 474); Leon A. M. (E. G.: 474).

Clasa VI-a: Dumitrescu Valeriu (VI: 746, 8; VII: 655); Lăzărescu A. Ion (VI: 746, 7, 8; VII: 655, 60); Marinescu E. Emil (VI: 752; VII: 655, 9, 60); Rădoi M. Marin (VI: 746, 8; VII: 655).

Clasa VII-a: Mănescu Gh. Margareta (VII: 662, 4, 5, 6).

Liceul „Matei Basarab", Bucureşti.

Clasa VI-a: Ieşan St. Alexandru (VI: 747, 53, 4, 6, 9, 60; VII: 661, 4, 6; E. G.: 477, 82); Munz M. Eduard (VI: 746, 7, 8; VII: 661; VIII: 568).

Clasa VII-a: Antonescu D. Eugen (VII: 655, 6, 7, 8, 9, 61, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8; VIII: 567, 8, 9, 71); Oprişan Eug. Alexandru (VII: 655, 7, 9, 61, 2, 3, 4, 5, 6, 7; VIII: 564, 5, 8, 9); Popescu N. Ştefan (VII: 655, 6, 7, 8, 9, 61, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8; VIII: 564, 5, 7, 8, 9).

Clasa VIII-a: Girescu A. Constantin (VIII: 564, 5, 8).

Liceul „Cantemir Vodă", Bucureşti.

Clasa VI-a: Diaconescu Grigore (VI: 748; VII: 657); Nicolescu Dumitru (VI: 748; VII: 657).

Liceul „Spiru Haret", Bucureşti.

Clasa IV-a: Zamfirescu G. Gabriel (IV: 639, 40).

Clasa V-a: Mihalache M. Ştefan (V: 752; VI: 746, 7, 56; VII: 656, 7, 63, 4, 5, 6, 7; VIII: 564, 5, 8, 9).

Clasa VII-a: Luca S. Lazăr (VII: 663, 9); Prassa Gh. Constantin (VII: 662, 4, 5, 6, 7; VIII: 564, 5, 8, 9).

Liceul „Gheorghe Lazăr", Bucureşti.

Clasa VII-a: Timotin Al. Alexandru (VII: 658, 9, 62, 4, 5, 6; VIII: 568).

Clasa VIII-a: Prişcu R. Alexandru (VIII: 564, 5, 6, 8, 9).

Liceul „Titu Maiorescu", Bucureşti.

Clasa V-a: Timiş A. Dumitru (V: 751, 2*, 3*, 5*, 6*, 7, 8; VI: 747).

Clasa VI-a: Mateescu Gh. Arghir (VI: 746, 56); Mustăcescu V. Traian (VI: 746*, 7, 8; VII: 655, 9); Păunescu C. Victor (VI: 746); Stancu Z. Horia (VI: 753, 6).

Clasa VII-a: Athanasiu Gh. Amedeu (VII: 655, 6, 62, 7; VIII: 568); Benghiuj V. Ioan (VII: 655, 6, 62, 4, 5; VIII: 564, 5, 8); Girescu N. Aurel (VII: 655, 7; VIII: 564, 5, 8; E. G.: 472); Menasian M. Dragoş (VII: 655, 6, 62, 4, 5, 6, 7); Rădulescu T. Adrian (VII: 657, 64, 5, 71).

Clasa VIII-a: Burghiu D. Ion (VIII: 564, 5*, 6, 8, 9, 75, 6, 8): Rădulescu Gh. Ştefan (VIII: 564, 6, 8, 76, 8): Scheancu V. Nicolae (VIII: 564, 5, 6, 8).

Liceul „Mihai Viteazul", Bucureşti.

Clasa VI-a: Toma I. Eugen (VI: 746, 8; VII: 655: VIII: 568).

Clasa VII-a: Ionescu Gr. Ilie (VII, 661, 2, 4, 5, 6, 7; VIII; 564, 5, 8, 9); Ionescu Gr. Tudorel (VII; 661, 2, 4, 6, 7, 71; VIII: 568).

Colegiul Naţional „Sf. Sava", Bucureşti.

Clasa V-a: Săvescu A. Mircea (V: 764).

Clasa VI-a: Dumitrescu N. Iulius (VI: 756; VII: 655, 4, 6); Mihail Gh. Alexandru (VI: 756; VII: 655); Pop D. Mircea (VI; 746, 8; VII: 655*, 6, 7, 9).

Clasa VII-a: Bâlcu Şt. Nicolae (VII: 662, 4, 5, 6, 7; VIII: 568); Dimos Florin (VII: 655, 6, 7, 8*, 61; VIII: 564, 5, 8); Horbuniev P. Vasile (VII: 656, 7, 8, 60, 1, 2, 4, 6; VIII: 567); Popa A. Dan (VII: 655, 7); Purica Ionel (VII: 666, 7, 9, 73; VIII: 586).

Liceul „Gheorghe Şincai", Bucureşti.

Clasa VI-a: Cristescu G. Alexandru (VI: 746, 7, 8; VII: 655, 9); Daniilescu C. Constantin (VI: 747, 8, 9, 50, 1, 2; VII: 655).

Clasa VII-a: Pambuccian M. Ara (VII: 655, 62, 5; VIII: 564, 5, 8); Pascu M. Cristea (VIII: 564, 5, 6, 7, 8, 9).

Liceul „Sf. Gheorghe", Bucureşti.

Clasa VI-a: Pompei Gh. V. (E. G.: 493).

Liceul „Sf. Iosif" Bucureşti.

Clasa VI-a: Leţia L. Valentin (VI: 746, 8, 9, 50, 1; VII: 655; E. G.: 472, 3*, 4, 5*).

Liceul „B. P. Hasdeu", Buzău.

Clasa VII-a: Popescu I. Chiril (VII: 655, 6, 8, 9, 62, 3, 4, 5, 7; VIII: 564, 5, 7, 8, 9): Ştirbulescu E. Ion (VII: 656, 7, 8, 61).

Liceul „Ioniţă Assan", Caracal.

Clasa VI-a: Toma Fl. Iancu (VI: 746).

Clasa VII-a: Dragomir A. Dumitru (VIII; 564, 5, 8); Marinescu Gh. Ion (VII: 662, 7; VIII: 568); Safta R. Nicolae (VII: 655, 7, 62, 5; VIII: 568).

Clasa VIII-a: Amărăscu T. Nicolae (VIII: 564, 5, 6, 9, 70, 1); Florescu I. Marcel (VIII: 585).

Liceul „Traian Doda", Caransebeş.

Clasa IV-a: Cebuc M. Constantin (IV: 639, 40).

Liceul Militar Cernăuţi.

Clasa VI-a: Damian V. Corneliu (VII: 665).

Clasa VIII-a: Palade D. Toma (VIII: 564, 5, 6, 8, 9).

Liceul „Mircea cel Bătrân", Constanţa.

Clasa VII-a: Ghergic H. Gheorghe (VII: 662, 4, 5; VIII: 564, 5, 7, 8).

Clasa VIII-a: Niculescu A. Ion (VIII: 564, 5, 6, 7, 8, 9, 70, 1).

Liceul de fete „Elena Cuza", Craiova.

Clasa V-a: Grămescu R. Anthuza (V: 751, 2, 4, 6*, 8, 63*).

Colegiul Naţional „Carol I", Craiova.

Clasa IV-a: Gheorge M. Nicolae (IV: 636, 9, 40, 2*; V: 751*, 2, 3*; VI: 746).

Liceul „Ion Maiorescu", Giurgiu.

Clasa VIII-a: Palada I. Gr. (VIII: 572).

Liceul de Aplicație, Iași.

Clasa VII-a: Gheorghiu N. Alexandru (VII: 659; VIII: 564, 5, 6); Strugariu Gh. Timotei (VII: 663, 4).

Liceul Internat „C. Negruzzi" Iași.

Clasa V-a: Ionescu I. A. (V: 758); Marta C. Liviu (V: 759).

Clasa VII-a: Dolinescu C. Marcel (VII: 659, 62, 4, 5, 8); Ionescu D. Virgiliu (VII: 651, 5, 8, 9; VIII: 564, 5, 7, 8, 9); Strugariu Timotei (E. G.: 486).

Liceul Militar, Iași.

Clasa III-a: Anastasiu Paul (III: 211, 3, 6); Asândei N. Nicolae (III: 216); Bosinceanu P. Paul (III: 216); Botezatu I. (III: 214, 6); Chiriac S. Mircea (III: 216); Ciobanu Iosif (III: 216); Crivăț C. Gheorghe (III: 214, 6); Dabija D. Paul (III: 215, 6); Drăghicescu P. Constantin (III: 216); Enăchescu V. Tudor (III: 216); Filip V. Ioan (III: 213, 4, 5, 6); Gheorghe C. Dorin (III: 214, 6); Gheorghiu P. (III: 214, 5, 6); Gongu I. Răducan (III: 216); Gura Petru (III: 216); Hociung I. Romeo (III: 213, 4, 6); Munteanu E. Petru (III: 214, 6); Nichita I. Constantin (III: 216); Pavel M. Clement (III: 213, 4, 5, 6); Pietrăreanu I. Aurel (III: 216); Platan C. Florin (III: 216); Popa P. Paul (III: 216); Tofan C. Aurel (III: 214, 6); Toma Octavian (III: 213, 4, 6); Radu Paul (III: 216); Zahărescu E. Gh. (III: 214, 5).

Clasa IV-a: Aman Alexandru (IV: 639, 40, 2); Calcan I. A. Victor (IV: 639, 40, 2; E. G.: 493); Iacobeț Gh. Nicolae (IV: 639, 40, 2); Iordăcheanu M. Constantin (IV: 639, 42); Munteanu I. Sorin (IV: 639, 40, 2); Paraschivescu C. Marcel (IV: 639, 40, 2); Pintilescu Vasile (IV: 640, 2); Vlad Mircea (IV: 639, 40, 42; V, 755, 56, E. G.: 473).

Clasa V-a: Balan A. Corn (V: 758); Bârzescu Mircea (V: 759, 63, 4; VI: 747; VII: 664, 6); Ciumașu Viorel (V: 758, 63, 4); Ifrim I. Alfons (V: 759, 63; VII; 664); Ionescu I. Andrei (V: 750, 1, 2, 3, 5, 6, 9, 60, 3, 4; VI: 746, 7, 8); Nache Dumitru (VI: 750, 8; E. G.: 474); Radu M. Constantin (V: 759; VII: 664, 6).

Clasa VI-a: Bădârcă Gr. Ioan (VI: 748, 53); Ignat Gh. Mircea (VI: 752, 3, 6; E. G.: 493); Mihailescu I. Ștefan (VI: 748); Popescu V. Ioan (VI: 748); Teodorescu C. Constantin (VI: 746, 7, 8).

Clasa VII-a: Andarachi Ion (VIII: 567); Andrei Gh. Aurel (VII: 662, 7, 9, 71, 2*); Andreescu Mihai (VII: 662, 4, 5, 6, 7, 8; E. G.: 486); Ardeleanu Gh. (VII: 669; VIII: 568); Baciu C. Dumitru (VII: 667, 8, 71); Basacopol Alex. (VII: 664, 71); Bosinceanu Constantin (VII: 671, 2, 5; VIII: 567); Cecală Ioan (VII: 662, 4, 5, 6); Coroiu I. Dan (VII: 662, 4, 6; VIII: 564, 8); Ganea D. Nicușor (VII: 667); Opran I. Mircea (VII: 662, 4, 5, 6, 7, 9; VIII: 568); Palade Tudorache (VIII: 567, 8); Petrache C. Ioan (VII: 662, 4, 5, 6); Petrican Mihai (VII: 662, 4, 5, 6, 9, 71); VIII: 568);

Popa N. Nicolae (VII: 668, 9, 75; VIII: 567); Popa D. Petru (VII: 662, 6; VIII: 567, 8); Puiu I. Virgil (VII: 662, 4, 7, 8); Simion D. Adrian (VII: 659, 62, 4, 5, 6); VIII: 564, 8); Turculeţ Tiberiu (VII: 662, 7, 9, 71, 5); Ţicăloiu D. Octavian (VII: 669, 75); Văideanu M. Georgel (VII: 662, 5, 6): Vlad D. Gheorghe (VII: 669); Zaharia Mihai (VII: 662, 7, 8).

Clasa VIII-a: Bădulescu D. Mircea (VIII: 568); Căruntu D. Florin (VIII: 566, 8, 73, 6, 7); Marinescu M. Ioan (VIII: 566, 8, 76, 7; E. G.: 492, 3); Milea C. Constantin (VIII: 566, 8, 73, 6, 7; E. G.: 492, 3); Puchiu T. Gheorghe (VIII: 566, 8, 73, 6, 7).

Liceul „Coriolan Brediceanu", Lugoj.

Clasa VI-a: Buşneag A. Dumitru (VII: 655; VIII: 564, 5, 8, 9).

Liceul teoretic de fete, Piatra-Neamţ.

Clasa VII-a: Dobrescu V. Lucia (VII: 655, 6, 8, 9, 61, 2, 4, 5, 6, 7, 9, 71; VIII: 564, 8).

Liceul „I. C. Brătianu" Piteşti.

Clasa V-a: Maneca M. Constantin (V: 751, 2, 3*).

Liceul „Sf. Petru şi Pavel", Ploeşti.

Clasa V-a: Constantinescu R. Mihai-Dumitru (VI: 746, 52*, 3, 5; VII: 655*, 64, 5, 6*; VIII: 564, 5; E. G.: 493).

Clasa VII-a: Vizanti I. Nicolae (VII: 655, 65; VIII: 564, 8).

Clasa VIII-a: Bauman Eduard (VIII: 564, 5, 6, 8).

Colegiul Naţional „N. Filipescu", Predeal.

Clasa VI-a: Columbeanu D. Petre (VI: 748, 9, 56; VII; 664, 5; VIII: 569; E. G.: 472).

Clasa VII-a: Jurist Gh. Vlad (VII: 655, 6, 7, 8*, 9, 61, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9*, 71; VIII: 564, 5*, 6, 7, 8, 9, 71*); Iliescu C. C. (E. G.: 477, 8, 80).

Liceul „Roman Vodă", Roman.

Clasa VII-a: Vasilescu Al. Mircea (VII: 655, 64, 6, 8; VIII: 565, 8, 9).

Liceul „Principele Nicolae", Sighişoara.

Clasa VIII-a: Mochan I. Ionel (VIII: 568, 9).

Liceul „Principele Nicolae", Sinaia.

Clasa IV-a: Bontea Gr. Ana (IV: 639); Dumitru I. Petre (IV: 639).

Liceul „Radu Greceanu", Slatina.

Clasa VI-a: Ionescu V. Mihai (VII: 655, 9, 64, 6).

Liceul „Enăchiţă Văcărescu", Târgovişte.

Clasa VII-a: Anastasescu I. Alexandru (VII: 659, 62, 5; VIII: 564, 5, 8, 9).

Liceul „Tudor Vladimirescu", Târgu-Jiu.

Clasa V-a: Ghiță Gh. Ioan (V: 751, 2, 3, 63, 4; VI: 746, 7, 8).

Clasa VII-a: Gâță Gh. Gheorghe (VII: 661, 2, 3, 4, 6, 7, 8; VIII: 564, 5, 8; E. G.: 472); Giurconiu Gr. Mihail (VII: 657, 9; VIII: 564, 5, 8, 9).

Liceul „C. Diaconovici Loga", Timișoara.

Clasa VI-a: Popescu Gr. Mitică (VI: 746; VII: 655, 9, 64); Sârbu S. Iancu (VI: 746, 8, 56; E. G.: 472); Serăngău Mihai (VI: 746, 7, 8, 52; VII: 655, 9).

Liceul Militar „Mihai Viteazul", Timișoara.

Clasa IV-a: Chiran Paul (IV: 639); Stanciu V. Petre (IV: 639).

Clasa V-a: Teodorescu At. Alexandru (V: 763, 4).

Clasa VI-a: Oprea Nifon (VI: 747; VII: 655, 9; VIII; 568); Popescu I. Barbu (VI: 752); Țecu Pavel Traian (VI: 746, 56; VII; 664, 6).

Liceul „Regele Ferdinand", Turda.

Clasa VII-a: Ighian I. Mircea (VII: 655, 62, 3, 4, 6, 7; VIII: 566).

Liceul teoretic de fete, Turnu-Severin.

Clasa IV-a: Corâci I. Nicolina (VI: 746, 7, 8); Firoiu I. Maria (VI: 747, 8).

Clasa VIII-a: Cuțiu N. Puica (VIII: 564, 5, 6, 8, 9).

Liceul „Traian", Turnu-Severin.

Clasa V-a: Despa P. Gheorghe (V: 753); Muscalu Gr. Alexandru (V: 753); Nicolicioiu L. Ion (V: 753).

Clasa VI: Meilă I. Emil (VI: 746, 7, 8, 9; VII: 655); Negreanu D. Vlad (VII: 655, 9); Pletea C. Statie (VI: 746; VII: 655); Weinhara V. Robert (VI: 746, 9; VII: 655, 9).

Clasa VII: Dăescu N. Nicolae (VIII; 564, 5, 8, 9); Dumitrescu Gh. Traian (VII: 655, 6, 7, 71; VIII: 564, 5, 8, 9); Ionescu P. Liviu (VII: 659; VIII: 564, 5, 8, 9); Vlăduț Șt. Ion (VII: 655, 6, 7, 62, 4, 5, 6, 7; VIII: 564, 5, 8, 9*).

Clasa VIII-a: Alexandrescu I. Victor (VIII: 564, 5, 6, 7, 8, 71); Caramalău V. Eugen (VIII: 565, 6, 7, 8, 9*, 70).

Liceul din Vârșeț (Banat), Secția Română.

Clasa III-a: Ursulescu M. Gheorghe (III: 210*, 11*, 2*).

Clasa IV-a: Ișfanu T. Moise (IV: 640*).

Clasa V-a: Munteanu T. Ionel (V: 752).

Clasa VI-a: Ișfanu T. Teofil (VI: 746, 8*).

Liceul „M. Kogălniceanu" Vaslui.

Clasa VII-a: Târnoveanu Gh. Gh. (VII: 662, 4, 5, 6, 7).

Elevi pregătiţi în particular.

Clasa III: ZĂHĂRESCU E. GH. (III: 211, 6).

Clasa VI-a: PITIŞ L. NICOLAE (MIZIL) (VI: 746; VII: 655, 65; VIII: 564, 5, 9; E. G.: 478, 80, 4, 6, 93, 8).

Clasa VII-a: BURILEANU O. SANDA (VII: 655, 62, 6).

EXERCIŢII PROPUSE

Soluţiile exerciţiilor propuse în acest număr se primesc până la 1 Mai 1943

Clasa III-a. *Exerc. 222.* Un exagon neregulat ABCDEF este înscris într'un cerc (O) cu raza R = 2 cm. AD este un diametru al cercului, laturile $\overline{BC}$ şi $\overline{FE}$ sunt egale respectiv cu latura patratului şi latura triunghiului echilateral înscrise în cercul (O), fiind ambele paralele cu diametrul $\overline{AD}$.

Să se afle suprafaţa şi perimetrul acestui exagon.

V. GH.

III. 223. Se dă un triunghiu BAC dreptunghic în A şi având unghiul B de 60°. Să se arate că bisectoarea interioară $\overline{BB'}$ a unghiului B este a patra proporţională între laturile triunghiului dat.

O. N. Ţ.

III. 224. Se dă un cerc (O) de R şi o coardă $\overline{AB}$. Se prelungeşte coarda $\overline{AB}$ cu segmentul $\overline{BC} = \overline{AB}$; apoi se proiectează punctul C pe diametrul punctului A în D, iar D se proiectează în E pe dreapta $\overline{AB}$. Să se găsească distanţa punctului E la centrul O, ştiind că:

$$R = 100 \text{ m} \quad \text{şi} \quad \overline{AB} = 160 \text{ m}.$$

O. N. Ţ.

Clasa IV-a. *Exerc. 651.* Se consideră sistemele de ecuaţii:

$$\begin{vmatrix} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{vmatrix} \quad \text{şi} \quad \begin{vmatrix} mx + ny = p \\ m'x + n'y = p'. \end{vmatrix}$$

Fie $x = r$, $y = t$ soluţia primului sistem şi $x = u$, $y = v$ soluţia celui de-al doilea. Fără de a rezolva sistemele date, să se calculeze expresiile:

$$E_1 = \frac{rv + ut}{vt} \; ; \; E_2 = \frac{rv - ut}{vt} \; ; \; E_3 = \frac{ur}{vt} \; ; \; E_4 = \frac{rv}{ut}.$$

V. Gh.

IV. 652. Intr'un con circular drept cu vârful S şi baza cercul (O) este înscrisă o piramidă exagonală regulată SABCDEF.

Fie A', B', C', D', E', F', proiecţiile piciorului O al înălţimii $\overline{SO}$ pe feţele SAB, SBC, SCD, SDE, SEF, SFA. Ştiind că raza cercului (O) este R şi că înălţimea $\overline{SO}$ a conului dat este jumătatea apotemei feţei SAB, să se calculeze *suprafeţele* şi *volumele* celor două piramide:

SABCDEF şi OA'B'C'D'E'F'.

Aplicaţie: R = 10 cm.

O. N. Ţ.

IV. 653. Se dă o sferă (O) cu centrul O, iar raza R, şi se prelungeşte diametrul $\overline{MN}$ cu segmentul $\overline{NS} = \overline{MN}$.

Tangentele duse din S la sfera (O) formează un con circular drept.

Să se calculeze *suprafaţa* şi *volumul* acestui con.

Aplicaţie: R = 10 cm.

O. N. Ţ.

IV. 654. Intr'un con circular drept având generatoarea $\overline{SA} = m^2 + n^2$ şi raza cercului de bază $\overline{OA} = m^2 - n^2$, se proiectează piciorul O al înălţimii SO pe toate generatoarele conului considerat şi se obţine astfel un nou con circular drept cu vârful în O şi ca bază cercul (MN) al proiecţiilor lui O pe generatoare. Să se calculeze:

a) Suprafaţa şi *volumul* trunchiului de con cuprins între cercurile (O) şi (MN).

b) Suprafaţa şi volumul conului circular drept O (MN).

Aplicaţie: $m = 15$, $n = 13$.

O. N. Ţ.

Clasa V-a. *Exerc. 770.* Să se rezolve ecuaţia:

$$x^2 + (a+b)x + 13ab - 6(a^2+b^2) = 0.$$

N. M.

V. 771. Fiind dată ecuaţia:

$$x^2 + px + q = 0$$

cu rădăcinile x_1, x_2, să se formeze ecuaţia cu rădăcinile:

$$1 - \frac{1}{x_1}, \quad 1 - \frac{1}{x_2}.$$

Să se găsească relaţia dintre realizanţii celor două ecuaţii.

N. M.

V. 772. Se dau: o dreaptă xy şi două puncte A, B exterioare ei. Să ce găsească pe dreapta dată un punct M astfel încât BM să fie bisectoarea unghiului format de AM şi xy.

V. Gh.

V. 773. Se dă triunghiul ABC dreptunghic în A şi fie B' piciorul bisectoarei $\overline{BB'}$, iar B'' simetricul lui B' faţă de C.

Perpendiculara din B'' pe BB' întâlneşte în D paralela dusă din C la AB, iar perpendiculara în B' pe BB' taie în E ipotenuza BC. Să se arate că triunghiul DEB' este dreptunghic în E.

Gh. B.

V. 774. Fiind dat un triunghiu oarecare ABC, proiectăm vârful A în P şi Q pe înălţimile BB' şi CC' respectiv paralel cu CC' şi BB'. Să se arate că:

$$\overline{AP} \cdot \overline{AQ} = \frac{bc(b^2+c^2-a^2)^2}{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}$$

unde a, b, c sunt măsurile laturilor BC, CA, AB.

O. N. Ţ.

Clasa VI-a. *Exerc. 770.* Se dau: un con circular drept (C), cu vârful în V, de suprafață laterală nelimitată, și o sferă (S) de rază R, înscrisă în acest con.

Să se afle locul geometric al centrelor sferelor (*s*), de rază *r* (constantă), tangente deodată conului (C) și sferei (S).

V. GH.

VI. 771. Intr'un trapez dreptunghic ABCD (AD || BC) se dau lungimile *m* și *n* ale bazelor și înălțimea *i*. Fie A', B' proiecțiile vârfurilor A și B pe CD. Să se afle volumul solidului înnăscut prin rotirea trapezului AA'B'B în jurul axei A'B'.

I. I. S.

VI. 772. Intr'un triunghiu dreptunghic, avem relațiile:

$$1^0.\quad b+(a-b+c)\left(1+\operatorname{cotg}\frac{A}{2}\right)=(a+c)\operatorname{cotg}\frac{B}{2}$$

$$2^0.\quad (a+c)(1+b^2)\operatorname{cotg}\frac{B}{2}=b\left[(a+c)^2+\operatorname{cotg}^2\frac{B}{2}\right].$$

I. I. S.

VI. 773. Să se arate că între elementele unui triunghiu oarecare avem:

$$\operatorname{tg}A=\frac{2S}{2p(p-a)-bc}.$$

N. M.

VI. 774. Fie A_1, A_2 picioarele bisectoarelor unghiului A în triunghiul ABC înscris în cercul (O). Perpendicularele în A_1, A_2 pe BC întâlnesc în P_a, P'_a raza OA. Să se demonstreze că dacă l_a, l'_a sunt lungimile bisectoarelor AA_1, AA_2, atunci:

$$\overline{AP_a}:\overline{AP'_a}=\frac{l_a}{l'_a}\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}.$$

GH. B.

VI. 775. Să se arate că:

$$\operatorname{tg}3a\,(2\cos 2a+1)-\operatorname{tg}a\,(2\cos 2a-1)=2\,(\operatorname{tg}a+\operatorname{tg}2a).$$

I. I. S.

Clasa VII-a. *Exerc. 683.* Să se calculeze suma:

$$3.6+4.7+5.8+\ldots+n(n+3).$$

N. M.

VII. 684. Se dă funcţia:

$$y=\frac{x^2+mx+n}{x^3+1}.$$

1°. Să se determine m şi n astfel ca ecuaţia, care dă valorile lui x pentru care y este *maxim* sau *minim*, să aibă rădăcinile $+1$ şi -2.

2°. Să se studieze variaţia funcţiei y, ce se obţine prin înlocuirea lui m şi n cu valorile găsite mai sus.

I. I. S.

VII. 685. Fiind dată funcţia:

$$y=5x\operatorname{arctg}2x,$$

să se arate că

$$y''=\frac{y'}{x}-\frac{y}{x^2}+10.\frac{1-4x^2}{(1+4x^2)^2}.$$

N. M.

VII. 686. Să se reprezinte funcţia:

$$y=\frac{\sqrt{x^2-7x+10}}{x-3}.$$

N. M.

VII. 687. Să se demonstreze că semnul derivatei a doua a unei funcţii raţionale

$$y=\frac{P(x)}{P(x)}$$

depinde numai de semnul derivatei numărătorului lui y', atunci când $Q(x)=0$ are numai rădăcini imaginare, iar coeficientul

termenului de gradul cel mai mare al polinomului $Q(x)$ este pozitiv.

Aplicație. Să se găsească *maximul* și *minimul* funcției:

$$y = \frac{3x^2 - 5x + 2}{x^2 + x + 1}.$$

V. GH.

VII. 688. Să se studieze variația funcției:

$$y = \frac{\cos^2 2x}{\cos x \cos 3x}$$

și să se construiască curba reprezentativă a acestei variații.

O. N. Ț.

VII. 689. Să se studieze variația funcției:

$$y = 3\,\mathrm{tg}^3 x - 5\,\mathrm{tg}^2 x + 2$$

și să se construiască curba reprezentativă a acestei variații.

O. N. Ț.

Clasa VIII-a. *Exerc. 596.* In raport cu două axe rectangulare, fie date punctele $A(a, 0)$ și $B(0, a)$. O dreaptă variabilă dusă prin A taie pe OY în M. Paralela din M la bisectoarea întâia taie pe OX în P. Să să afle locul intersecției dreptelor AM, BP.

N. M.

VIII. 597. Fiind dată ecuația:

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

cu rădăcinile x_1, x_2, x_3, să se formeze ecuația cu rădăcinile

$$\frac{2x_1 + 3}{x_1 - 2}, \quad \frac{2x_2 + 3}{x_2 - 2}, \quad \frac{2x_3 + 3}{x_3 - 2}.$$

Caz particular:

$$p = \frac{9}{2}, \quad q = \frac{27}{4}, \quad r = \frac{27}{8}.$$

N. M.

VIII. 598. Dacă x_0, y_0 este un punct situat pe elipsa de elemente a, b, c avem relaţia:

$$a^2 - \frac{c^2}{a^2} x_0^2 = b^2 + \frac{c^2}{b^2} y_0^2 = \frac{b^2}{a^2} x_0^2 + \frac{a^2}{b^2} y_0^2.$$

N. M.

VIII. 599. Fie dat polinomul:

$$P(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A^n.$$

Să se arate că, dacă

$$2nA_2 A_0 = (n-1) A_1^2,$$

atunci în polinomul

$$P\left(x - \frac{A_1}{nA_0}\right)$$

lipsesc termenii în x^{n-1} şi x^{n-2}.

N. M.

VIII. 600. Considerăm ecuaţia:

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0$$

şi formele:

$$F_1 = 8p^3 + 27q^2 \quad , \quad F_2 = p^2 + 12r.$$

Să se arate, că ecuaţia are o rădăcină dublă când:

$$4r(F_1 - 2pF_2)^2 = 9q^2 F_2 (F_1 - 4pF_2).$$

Cazul $F_1 = F_2 = 0$.

N. M.

VIII. 601. Fie punctele A(— 2, 0), B(4, 0), C(0, 3). O dreaptă variabilă dusă prin A taie pe OY în M şi pe BC în N. Să se afle locul geometric al intersecţiei dreptelor ON, BM.

N. M.

VIII. 602. Distanţă dela punctul F $(c, 0)$ la intersecţia dreptelor

$$y = \frac{a^2 y_0}{b^2 x_0} x \quad , \quad y_0 (x - c) = y (x_0 - c)$$

este a.

N. M.

VIII. 603. Se dă funcţia:

$$y = \frac{x^2 + ax + b}{x^3 + 1}.$$

1°. Să se determine a şi b aşa fel ca ecuaţia, care dă maximele şi minimele acestei funcţii, să aibă suma a două rădăcini egală cu -1, iar produsul celorlalte două rădăcini egal cu $\frac{4}{7}$.

2°. Să se deducă din graficul funcţiilor, natura rădăcinilor ecuaţiei:

$$mx^3 - x^2 - ax + m - b = 0,$$

a şi b fiind înlocuiţi cu valorile obţinute mai sus, iar parametrul m variind dela $-\infty$ la $+\infty$.

I. I. S.

Exerciţii generale. *Exerc. 508.* Se cer cele mai mici numere întregi pozitive care verifică relaţia:

$$\frac{x^m - y^n}{y^m + y^n} = \left(\frac{5}{7}\right)^2.$$

Aplicaţie pentru $m = 2$, $n = 1$.

GH. B.

E. G. 509. Să se rezolve ecuaţia:

$$\varphi_4 (5^x . 7^y = 1344.$$

I. L.

E. G. 510. Dacă φ_i (N) reprezintă indicatorul de ordinul i al lui N, să se rezolve ecuaţia:

$$\varphi_x (1943) = 1.$$

I. L.

E. G. 511. Dacă $P_x(y)$ reprezintă produsul numerelor prime cu y din şirul natural al numerelor până la x, să se calculeze:

$$P_{50}(30) \quad \text{şi} \quad P_{30}(50).$$

I. L.

E. G. 512. Numărul divizorilor unei puteri pare a unui număr dat este impar.

I. L.

E. G. 513. Dacă p este un număr prim absolut, atunci:

$$\varphi[(p-1)!+1] = M(p-1),$$

unde $\varphi(i)$ însemnează indicatorul lui i.

I. L.

E. G. 514. In câte moduri se pot descompune numerele:

$$N_1 = a^{\alpha}.b^{2\beta+1} \quad \text{şi} \quad N_2 = a^{2\alpha}.b^{2\beta}$$

într'un produs de doi factori, neţinând seamă de ordinea factorilor?

I. L.

E. G. 515. Ştiind că n este un divizor al lui N şi $\varphi(i)$ indicatorul lui i, atunci:

$$\varphi(n.N) = n.\varphi(N).$$

I. L.

E. G. 516. In ce caz numărul divizorilor unui număr dat este o putere perfectă?

I. L.

E. G. 517. Dacă $S_{x \to y}(z)$ reprezintă suma numerelor prime cu z din şirul numerelor naturale dela x la y, să se calculeze suma:

$$S_{100 \to 200}(100) + S_{100 \to 200}(200).$$

I. L.

INSTRUCȚIUNI

Pentru redactarea și trimiterea soluțiunilor exercițiilor publicate în *Gazeta Matematică Supliment cu exerciții* se vor avea în vedere *Instrucțiunile* publicate în numerele 1, 2, 3 pe copertă.

Drepturile de reproducere rezervate Societății «Gazeta Matematică».

Elevii claselor VI, VII și VIII, cu bogată activitate la această revistă își pot lărgi cadrul activității rezolvând probleme din „Gazeta Matematică".

In Biblioteca Societății „Gazeta Matematică" au apărut și se găsesc următoarele:

VII. **Gh. Lazăr,** *Trigonometrie drept liniară* (după cursul predat de **Gh. Lazăr** la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu** și **G. Țițeica,** Vocabular Matematic . . . . . Lei 20

X. **G. Țițeica,** Culegere de Probleme de Geometrie . . Lei 220

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. Istoric, învățăminte. Volum jubilar (500 pag.) { pentru particulari . . . . . Lei 300 / pentru abonații G. M. și S. G. M. . . Lei 150

XII. **V. Cristescu,** Culegere de Probleme de Trigonometrie. Partea I. (Goniometrie) revăzută și adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . Lei 140

XIII. **I. Ionescu,** Culegere de Probleme de Aritmetică. Partea I. Aritmetica rațională . . . . . Lei 250

XIV. **V. Cristescu,** Culegere de Probleme de Trigonometrie. Partea I-a. (Trigonometrie plană). Ediția II-a revăzută și adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 140

XV. **A. G. Ioachimescu,** Culegere de Probleme de Algebră. Partea I. Ediția IV-a revăzută și mărită . . . . . Lei 170

XVI. **G. Țițeica,** Culegere de Probleme de Geometrie Analitică. Partea I. Ediția II-a, adăogită de *N. G. Botea* . . . . . Lei 230

XVII. **A. G. Ioachimescu,** Culegere de Probleme de Algebră. Partea II-a. Ediția IV-a, revăzută și mărită . . . . . Lei 350

Biblioteca Istorică a GAZETEI MATEMATICE

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărțile I — VI de Geometrie plană) tradusă din limba greacă de *V. Marian* . . . . . Lei 250

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărțile VII—IX de Aritmetică și Cartea X a Iraționalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . Lei 300

III. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărțile XI—XIII de Geometrie în spațiu; Cartea XIV a lui HYPSICLE și Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian**. . . . . Lei 200

Biblioteca Matematică „GEORGE ȚIȚEICA"

I. **Ion Ionescu,** *Maxime și minime geometrice* . . . . . Lei 160

Suplimentul cu Exerciții. Abonamentul anual (9 numere) . . Lei 100

„Gazeta Matematică" apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 300 lei anual, se plătește înainte și începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului și nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele și toată corespondența se trimite pe adresa:

Societății „GAZETA MATEMATICĂ"

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviței No. 158. — București 2

(Telefon: 3-9803).

M. O., IMPRIMERIA NAȚIONALĂ. — C. 15.313

GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCIŢII

ANUL IX. No. 6 1 MARTIE 1943

SIBIU

SOCIETATEA GAZETA MATEMATICĂ
CALEA GRIVIŢEI, 158. BUCUREŞTI 2. — TELEFON 3-9803

GAZETA MATEMATICA
SUPLIMENT CU EXERCIŢII

ANUL IX. No. 6 — 1 MARTIE 1943

ABONAMENTUL LEI 100 PE AN (9 numere)

Soluţii şi orice corespondenţă pe adresa:

Casa «Gazeta Matematică», Calea Griviţei 158. — Bucureşti 2

CONCURS DE MECANICĂ

(Regulamentul concursului a fost publicat în Nr. 3 al Suplimentului)

7. Fie o placă patrată de latură a şi greutate specifică $\gamma^{kg}/_{cm^3}$. Din placă se taie o parte circulară trecând prin centrul plăcii şi cu centrul pe diagonală şi această porţiune se aşază simetric peste placa rămasă (cu centrul pe diagonală şi trecând prin centrul patratului). Cât trebuie să fie raza cercului pentru ca centrul de greutate al plăcii să fie acum pe diagonală la distanţa $\frac{a}{10}$ de centru?

8. Se dă un pendul format dintr'un fir fără greutate proprie de unul din capete căruia atârnă un inel foarte mic de greutate G. Celălalt capăt al firului pendulului este fixat într'un punct A iar pendulul lăsat să atârne. Pentru ca firul pendulului să se încline faţă de verticala cu un unghiu de 30^0, se trece un al doilea fir fără greutate proprie prin inel iar cele două porţiuni ale firului sunt prima la 45^0 cu verticala, iar a 2-a orizontală. Să se determine forţa cu care trebuie tras de capetele acestui fir pentru ca firul pendulului să facă 30^0 cu verticala şi tensiunea ce se naşte în firul pendulului.

9. Intr'un plan vertical o bară de lungime $2l$ şi greutate G omogenă, se reazemă de solul orizontal şi de muchiile a 2 trepte ale unei scări (de înălţime a şi adâncime a). Pentru ca bara să stea în echilibru sub unghiul 45^0 se leagă un fir de extremitatea sa inferioară şi de baza primei trepte. Să se determine tensiunea în acest fir şi forţele de sprijin date de trepte asupra barei.

10. Pe o masă orizontală este aşezat un cilindru drept fără fund de rază a bazei R. In interiorul cilindrului cu centrul mare

în contact cu masa se află o emisferă de rază tot R şi greutate G_1. Peste emisferă, în contact cu ea şi cu peretele cilindrului este o sferă de rază r ($r < R$) şi greutate G_2. Să se determine greutatea P a cilindrului astfel ca el să nu se răstoarne.

11. Pe masa orizontală sunt aşezate 2 sfere egale de rază R şi greutate G atingându-se una cu alta. In contact cu cele 2 sfere peste ele este aşezat un cub de greutate P şi latura 2R cu una din feţe în planul vertical şi diagonala verticală. Pentru ca sferele să nu se depărteze una de alta sunt înconjurate cu un fir. Se întreabă ce tensiune se va naşte în acest fir. Ce forţe există între sfere şi sol la echilibru.

12. Fie o bară de $\gamma^{kg}/_{cm}$ îndoită în formă de S. Bucla superioară este un semicerc AB de rază R, iar bucla inferioară un semicerc BC de rază 2R. Se atârnă bara cu un fir prins de punctul A al buclei celei mici. Să se determine unghiul pe care-l face la echilibru dreapta ABC cu verticala.

EXERCIŢII REZOLVATE

Exerciţii generale. *Exerc. 475. Se cere cifra* m *şi numărul* abc, *ştiind că produsul* $m \times abc$ *este inversul numărului,* cba.

GH. B.

Trebuie avut

$$m \times abc = cba \quad \therefore \quad c > a.$$

Dăm lui m pe când valorile 2, 3,... 9.

1) $m = 2$, atunci $a < 5$ şi pereche, deci $a = 2$ sau 4.
Pentru $a = 2$, avem $2 \times 2bc = cb2$ $\therefore$ $c = 1$ sau 6.
$c = 1 < a$ deci neacceptabil, $c = 6$ dă

$$2 \times 2b6 = 6b2$$

imposibilă căci membrul I este mai mic ca 600.

2) $m = 3$; $3 \times abc = cba$; $a < 4$.
$a = 1$; $3 \times 1bc = cb1$; $c = 7$ imposibil
$a = 2$; $3 \times 2bc = cb2$; $c = 4$ „
$a = 3$; $3 \times 3bc = cb3$; $c = 1$ „

3) $m = 4$; $4 \times abc = cba$; $a < 3$ şi pereche.
$4 \times 2bc = cb2$; $c = 3$ sau 8; imposibil.

4) $m = 5$; $5 \times abc = cba$; $a < 2$ $\therefore$ $a = 1$.
$5 \times 1bc = cb1$ care e imposibilă.

5) $m = 6$; $6 \times 1bc = cb1$, imposibilitate.

6) $m = 7$; $7 \times 1bc = cb1$; $c = 3$ dar
$7 \times 1b3 = 3b1$ este imposibilitate.

7) $m = 8$; $8 \times 1bc = cb1$, imposibilitate.

8) $m = 9$; $9 \times 1bc = cb1$ $\therefore$ $c = 9$; dar
$9 \times 1b9 = 9b1$ nu este posibil.

Deci problema nu are soluţii.

E. G. 476. Să se arate că, dacă p *este un număr prim absolut, avem:*

$$(p-1)^{2^4} - 2^{4(p-1)} = M(17 \cdot p).$$

I. L.

Observăm că:

$$(p-1)^{16} - 1 = M(17 \cdot p).$$

Cu 17 avem divizibilitate în baza teoremei lui FERMAT, iar cu p în baza faptului că: $(p-1)^{2k} = Mp + 1$.

Apoi mai observăm că, tot în baza teoremei lui FERMAT:

$$16^{p-1} - 1 = M(17 \cdot p)$$

şi
$$16^{p-1} - 1 = \left(16^{\frac{p-1}{2}} - 1\right)\left(16^{\frac{p-1}{2}} + 1\right).$$

Ori avem:
$$\left(16^{\frac{p-1}{1}} + 1\right) = M17.$$

I. L.

E. G. 479. Să se arate că, dacă p *este un număr prim absolut, atunci avem:*

$$a^{40 \cdot (p-1)} - (10 \cdot p)^{10} - 1 = M(100p).$$

I. L.

Divizibilitatea cu p este uşor de constatat căci, în baza teoremei lui FERMAT avem:

$$a^{40(p-1)} - 1 = Mp \text{ şi apoi } (10p)^{10} = Mp.$$

De asemenea, divizibilitatea cu 100 se constată uşor căci:

$$(10 . p)^{10} = M10^{10} = M100$$

iar: $$a^{40 \cdot (p-1)} = (a^{p-1})^{\varphi(100)}.$$

Or, în baza teoremei lui FERMAT generalizată de EULER avem:

$$(a^{p-1})^{\varphi(100)} - 1 = M100.$$

Observaţie. In enunţ a apărut $a^{10 \cdot (p-1)}$ în loc de $a^{40 \cdot (p-1)}$.

I. L.

E. G. 481. Să se arate că:

$$30!\ 66! = M97 - 1$$

$$31!\ 65! = M97 + 1.$$

I. L.

Ştim că în general avem (vezi, *Exercices d'Aritmétique* par J. FRITZ PATRICK et CHEVREL, pag. 435) că, dacă p este un număr prim şi q un număr întreg mai mic decât $(p - 1)$, avem:

$$q!\ (p - q - 1) + 1 = Mp;\ \text{dacă } q \text{ este par}$$

şi $$q!\ (p - q - 1) - 1 = Mp;\ \text{dacă } q \text{ este impar.}$$

In cazul nostru avem:

$$q = 30\ ;\ p = 97 \quad \text{sau} \quad q = 31 \quad \text{şi} \quad p = 97.$$

I. L.

E. G. 483. Să se arate că, dacă p *este un număr prim absolut, atunci avem:*

$$\frac{\left(\frac{p-1}{2} + 1\right) \cdot \left(\frac{p-1}{2} + 2\right) \ldots (p-1)}{\left(\frac{p-1}{2}\right)!} = Mp \pm 1.$$

I. L.

Dacă înmulţim cu $\left(\frac{p-1}{2}\right)!$ avem:

$$(p-1)! = Mp \pm \left[\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right]^2.$$

Or, după teorema lui WILSON avem:

$$(p-1)!+1 = Mp.$$

Deci ne rămâne să arătăm că:

$$\left[\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right]^2 \pm 1 = Mp.$$

Dar, aceasta este demonstrată în *Exercices d'Aritmétique* par FRITZ-PATRICK şi CHEVREL, pag. 431.

Intr'o notă ce se va publica în G. M. va apare chiar o generalizare a acestei proprietăţi.

I. L.

E. G. 484. Să se arate că:

$$20!\ 20! \pm 1 = M41.$$

I. L.

In baza faptului că, dacă p este prim, avem:

$$\left[\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right]^2 \pm 1 = Mp.$$

Atunci pentru $p = 41$ avem cazul de mai sus.

Observaţie. In enunţ a apărut

$$20!\ 21!\ \pm 1 = M41$$

ceea ce era eronat.

I. L.

E. G. 485. Dacă p *este un număr prim absolut, atunci avem:*

$$1^{p-1} + 2^{p-1} + \ldots + (p-1)^{p-1} = Mp + 1.$$

I. L.

In baza teoremei lui FERMAT, avem:

$$a^{p-1} = Mp + 1.$$

Deci în membrul I, vom avea $(p-1)$ valori ale lui 1, adică va fi $Mp+1$.

I. L.

E. G. 487. Să se arate că, dacă p *este prim absolut şi mai mare ca* 2, *atunci:*

$$1!(p-2)!+2!(p-3)!+\ldots+\left[\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right]^2=Mp+\tau$$

unde $\tau=0$ *când* $\left(\frac{p-1}{2}\right)$ *este par şi* $\tau=1$ *când* $\left(\frac{p-1}{2}\right)$ *este impar.*

I. L.

In baza celor arătate la soluţia *Exerciţiilor Generale* No. 481 şi No. 483, avem:

$$(2a)!(2b)!=M(2a+2b+1)-1$$

sau

$$(2a+1)!(2b-1)!=M(2a+2b+1)+1.$$

Dacă $(2a+2b+1)$ reprezintă un număr prim absolut, şi

$$\left[\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right]^2=Mp\mp 1.$$

Prin urmare termenii sumei din membrul I vor fi:

$$\underbrace{(Mp+1)+(Mp-1)+\ldots}_{\left(\frac{p-1}{2}\right)\text{ termeni.}}$$

Sau:

$$\underbrace{+1-1+1-1+\ldots=\tau}_{\left(\frac{p-1}{2}\right)\text{ termeni.}}$$

Or, dacă $\left(\frac{p-1}{2}\right)$ este par atunci $\tau=0$, iar dacă $\left(\frac{p-1}{2}\right)$ este impar, $\tau=1$.

Observaţie: In enunţ a apărut $\tau=+1$, ceace este eronat.

I. L.

E. G. 488. Să se arate că:

$$[\varphi(n)! - 1]^{\varphi(n)} - 1 = Mn!$$

unde $\varphi(n)$ *este indicatorul lui* n, *care este prim absolut.*

I. L.

Observăm că, dacă n este prim absolut, avem: $\varphi(n) = n - 1$, deci rezultă că:

$$[(n-1)! - 1]^{n-1} - 1 = Mn!$$

Cum pentru $n > 2$ avem $n - 1$ par, urmează că:

$$[(n-1)! - 1]^{2k} = M(n-1)! + 1.$$

Apoi cum în baza teoremei lui FERMAT avem:

$$[(n-1)! - 1]^{n-1} = Mn + 1$$

urmează că va fi $Mn!$

I. L.

E. G. 489. Să se arate că dacă $\sigma(a)$ *reprezintă suma numerelor prime cu* a *şi mai mici ca el şi dacă* p *este prim absolut, care nu divide pe* a, *atunci:*

$$\sigma(a^p) - \sigma(a) = Mp.$$

I. L.

Ştim că:

$$\sigma(a^p) = \frac{1}{2} a^p \cdot \varphi(a^p) = \frac{1}{2} \cdot a^{2p-1} \cdot \varphi(a)$$

$$\sigma(a) = \frac{1}{2} a \cdot \varphi(a)$$

Deci:

$$\sigma(a^p) - \sigma(a) = \frac{1}{2} \varphi(a) \cdot a [a^{2(p-1)} - 1] = Mp.$$

Deoarece în baza teoremei lui FERMAT avem:

$$(a^2)^{p-1} - 1 = Mp.$$

I. L.

Până la 1 Februarie 1943 s'au primit soluții bune (la exercițiile propuse în numerele 3, 4, 5 ale anului al IX-lea)(*) dela:

Liceul de fete „Elena Ghiba Birta", Arad.

Clasa V-a: Iercan M. Aurelia (V: 756); Popescu A. Doina (V: 755, 6).
Clasa VI-a: Petru A. Doina (VI: 756).

Liceul „Moise Nicoară", Arad.

Clasa VII-a: Todor I. Liviu (VII: 662, 3*, 4, 6, 7, 8).

Liceul „Gh. Codreanu" Bârlad.

Clasa VI-a: Manoliu Sp. Mihai (VI: 756).

Liceul „Samuil Vulcan", Beiuș.

Clasa IV-a: Miclea Traian (IV: 640: 7).
Clasa V-a: Bolcaș D. Gheorghe (V: 755, 64; VII: 664); Costea D. Florian (V: 755*).
Clasa VI-a: Maliță A. Mircea (VI: 754).

Liceul „N. Bălcescu", Brăila.

Clasa VI-a: Cazacu A. Vlad (VI: 758; VII: 664, 6); Constantinescu N. Ilie (VI: 758, 61*, 2*, 4*, 5).

Școala Centrală de fete, București.

Clasa VII-a: Rovența I. Ana (VII: 662).

Liceul „Aurel Vlaicu", București.

Clasa V-a: Barbaiani A. Mihai (V: 755*, 6*, 9*; VI: 755, 6, 7; VII 664, 6; VIII: 573, 5; E. G.: 486); Leon A. Mihail (V: 755*, 6*, 9*; VI: 755, 6, 7: VII: 664, 6).
Clasa VII-a: Mănescu G. Margareta (VII: 671, 6*, 80*).

Institutul de fete „Sf. Elena", București.

Clasa VIII-a: Simion G. Mioara (VIII: 589*, 91*).

Liceul „Matei Basarab", București.

Clasa VI-a: Cristea I. Paul (VI: 757*; VII: 664); Ieșan Șt. Alexandru (VI: 757*, 8, 62*, 5; VII: 662); Muntz M. Eduard (VI: 756, 7; VII: 662, 7).
Clasa VII-a: Antonescu D. Eugen (VII: 662, 3*, 4, 5, 6, 7, 8*, 71, 6, 80); Varveri M. Constantin (VII: 664, 6, 80).

---

*) Numărul unui exercțiu foarte bine rezolvat și îngrijit redijat este însoțit de semnul *.

Liceul „Spiru Haret", Bucureşti.

Clasa V-a: Mihalache I. Ştefan (V: 764*; VI: 759, 60).

Liceul „Gheorghe Lazăr", Bucureşti.

Clasa VI-a: Timotin Al. Alexandru (VII: 667*, 9, 73).

Clasa VIII-a: Prişcu R. Alexandru (VIII: 573, 5), Săftoiu I. Eliodor (VIII: 572, 6, 7*, 8*, 9).

Liceul „Titu Maiorescu", Bucureşti.

Clasa IV-a: Seni Dinu (IV: 640*, 3*, 6*, 9, 50; V: 759).

Clasa VI-a: Cantuniar Cristu (VI: 759); Codreanu Nestor (VI: 760); Dobrescu Al. Constantin (VI: 756, 72); Ghiaţă Vladimir (VI: 758, 9); Mustăcescu V. Traian (VI: 753*, 4*, 6, 7*; VII: 664, 6); Păunescu C. Victor (VI: 753*, 6); Stancu Z. Horia (VI: 757*; VII: 664, 6); Ulieru C. Mihail (VI: 756, 69).

Clasa VII-a: Girescu N. Aurel (VII: 662, 3*, 4, 5, 6); Orezeanu A. Dumitru (VII: 664, 6).

Clasa VIII-a: Burghiu D. Ioan (VIII: 579*); Peleanu A. Ioan (VIII: 576, 89, 90); Radu C. Narcis (VIII: 589); Rădulescu Gh. Ştefan (VIII: 575); Scheaucu V. Nicolae (VIII: 590).

Colegiul Naţional „Sf. Sava", Bucureşti.

Clasa IV-a: Dumitrescu F. Sorin (IV: 641*, 7*: V: 755, 6, 7, 8, 9, 63; VI: 752, 6, 6).

Clasa V-a: Săvescu A. Mircea (V: 758, 9*; VII: 664, 6).

Clasa VI-a: Bărdăune D. Nicolae (VI: 752, 6; VII: 666); Dumitrescu N. Iuliu (VI: 756, 60; VII: 664); Georceacopol E. Dan (VI: 758, 9*); Mihail G. Alexandru (VI: 756; VII: 666); Pop V. Mircea (VI: 756); Spoială L. Laurenţiu (VI: 756; VII: 664, 6).

Clasa VII-a: Dimos Florin (VII: 662, 4, 5, 6, 7); Dumitrescu F. Dan (VII: 662, 4, 5, 6*, 7*; VII: 576): Mişicu V. Mircea (VIII: 573, 6, 7, 9, 85, 9); Nicola Cornel (VII: 671).

Liceul „Gheorghe Şincai", Bucureşti.

Clasa VI-a: Danielescu C. Constantin (VI: 756, 7*).

Clasa VII-a: Ene Al. Ioan (VII: 664, 6, 7).

Clasa VIII-a: Niculescu P. (VIII: 573, 8*, 9*).

Liceul „Sf. Iosif" Bucureşti.

Clasa III-a: Ionescu A. Virgil (III: 213, 5); Popovici I. Valentin (III: 216); Raşcu Alexandru (III: 215); Receanu D. Cezar (III: 215).

Clasa VI-a: Letia L. Valentin (VI: 754*, 5*, 6, 7*: VII: 664, 6; VIII: 573, 5, 9).

Liceul Internat, Buftea.

Clasa V-a: Antonescu C. Nicolae (V: 755); Bădulescu I. Cezar (V: 756); Zanelli Nicolae (V: 755).

Liceul „B. P. Haşdeu", Buzău.

Clasa VII-a: Ionescu I. Ovidiu (VII: 667); Popescu I. Chiril (VII: 666, 9, 70, 1); Ştirbulescu E. Ion (VII: 662, 4, 6, 7).

Liceul „Ştirbei-Vodă", Călăraşi.

Clasa V-a: Constantinescu D. Petre (V: 755); Enache Constantin (V: 766*; VI: 756; VII: 665); Roman G. Ioan (V: 755, 6; VI: 756; VII: 665).

Clasa VI-a: Dumitrescu E. Ilie (VI: 758, 60; VII: 662, 4, 5, 6).

Liceul „Ioniţă Assan", Caracal.

Clasa VII-a: Dragomir D. Dumitru (VII: 662, 4, 5, 7); Mihăilescu Şt. Dinu (VII: 662, 4, 5, 6); Safta R. Nicolae (VII: 664, 6).

Clasa VIII-a: Mustaţă C. Constantin (VIII: 575, 6, 89).

Liceul Militar Cernăuţi.

Clasa VIII-a: Voluşniuc Petru (VIII: 572, 6).

Liceul „Mircea cel Bătrân", Constanţa.

Clasa VIII-a: Toma M. Virgiliu (VIII: 578*, 9*, 85*, 9, 90*).

Liceul „Oltea Doamna", Iaşi.

Clasa V-a: Albu D. Aurelia (V: 755, 6*).

Liceul Militar, Iaşi.

Clasa III-a: Andrian T. G. (III: 216, 9); Anton Aurel (III: 216, 9); Başta Mircea (III: 216: 9); Buzoianu M. (III: 216, 9); Corduneanu Constantin (III: 216, 9); Pintilie Valerian (III: 216, 9); Rădulescu Mihai (III: 216, 9).

Clasa IV-a: Bârsănescu M. Virgiliu (IV: 642, 7, 8); Calcan V. Victor (IV: 648); Chiriac G. Dumitru (IV: 647, 8); Paraschivescu C. Marcel (IV: 647, 8); Stănescu D. Ion (IV: 647, 8): Tuleaşcă Ioan (IV: 642, 7); Vlad Mircea (IV: 647, 8, 50).

Clasa V-a: Bălăscuţă Traian (V: 755, 66); Bârzescu Mircea (V: 755, 6, 66); Borş Constantin (V: 755: 6); Chirilovici Dumitru (V: 755, 66); Ciobanu D. Dan (V: 755, 6, 66); Ciortoloman Stelian (V: 755, 66); Ciumaşu Viorel (V: 755, 6, 66); Ciureanu G. Constantin (V: 755, 6, 66); Dumitrescu Gh. (V: 755, 6, 66); Ifrim I. Alfons (V: 755, 6); Ionescu I. Eduard (V: 755, 6); Kica Roşie Marcel (V: 755, 6, 66); Marinescu N. Gh. (V: 755, 6); Martin Virgil (V: 755, 6); Netedu Constantin (V: 755, 6); Paloşanu Nicolae (V: 755, 6); Păsculescu D. Horaţiu (V: 755, 6, 66); Popa N. Ioan (V: 755, 6, 66); Radu M. Constantin (V: 755, 6, 66); Stan G. Constantin (V: 755, 6); Ştefănescu Aurelian (V: 755, 6); Văideanu Constantin (V: 755, 6, 66); Vartic Gheorghe (V: 755, 6); Volănescu I. Panait (V: 755: 6).

Clasa VI-a: Edu C. Eugen (VI: 753, 6, 60); Mihăilescu I. Ştefan (VI: 752, 3, 6); Percea I. Dumitru (VI: 757, 9, 64); Petrescu Dumitru (VI: 756, 7, 9, 60); Rolică M. Zaharia (VI: 753, 6, 9, 60); Roşu Tr. Nicolae (VI: 753, 4, 6, 7, 8, 9, 60); Teodorescu C. Constantin (VI: 753, 6, 7, 8, 9, 60), Vintilă G. Constantin (VI: 753, 4).

Clasa VII-a: Vasiliu G. Dumitru (VII: 662, 4*, 5, 6, 7*, 8*).

Liceul de Aplicaţie, Iaşi.

Clasa VII-a: Gheorghe N. Alexandru (VII: 664, 6).

Liceul Internat, Iaşi.

Clasa VII-a: Ionescu D. Virgiliu (VII: 662, 4, 5, 6, 7*).

Liceul „Naţional", Iaşi.

Clasa IV-a: Ţugulea T. Andrei (IV: 639, 40, 2);

Liceul „Petru Rareş", Piatra-Neamţ.

Clasa VII-a: Diaconescu C. Petru (VII: 662, 4, 5, 6, 7); Munteanu V. Gheorghe (VII: 662, 4, 5, 6).

Liceul „I. C. Brătianu" Piteşti.

Clasa V-a: Ardei N. Marius (V: 764).

Clasa VII-a: Lehrer A. Alexandru (VII: 662, 4, 6, 7); Niculescu T. Avram (VII: 662, 4, 6, 7); Pleşa D. Florea (VII: 662, 4, 6, 7); Retevoescu I. Gheorghe (VII: 662, 4, 6, 7).

Liceul „Sf. Petru şi Pavel", Ploeşti.

Clasa V-a: Constantinescu R. Mihai (V: 764*, 6*, 7*, 9*; VI: 756, 60; VIII: 580).

Clasa VII-a: Vintilescu Al. George (VII: 662, 4, 5).

Colegiul Naţional „N. Filipescu", Predeal.

Clasa VI-a: Columbeanu D. Petre (VI: 752, 8, 9, 60; VII: 662, 7, 9; E. G.: 490, 9).

Clasa VII-a: Iliescu C. C. (VII: 662, 3*, 4, 5, 6, 7*, 8*).

Clasa VIII-a: Vlădoianu T. Rusan (VIII: 572, 5, 6, 8*, 88*, 9).

Liceul „Roman Vodă", Roman.

Clasa VII-a: Vasilescu Al. Mircea (VII: 662, 7, 80*).

Gimnaziul „Principele Nicolae", Sinaia.

Clasa III-a: Bumbăcaru G. (III: 213); Dumitru Mihai (III: 213); Niculescu Mircea (III: 213); Porfireanu Dan (III: 216).

Liceul „Enăchiță Văcărescu", Târgoviște.

Clasa VIII-a: Alboteanu B. Vasile (VIII: 573, 5, 8*, 9).

Liceul „Tudor Vladimirescu", Târgu-Jiu.

Clasa V-a: Ghiță G. Ioan (V: 752, 5, 6, 8; VI: 754, 6, 7, 9, 60, 1).
Clasa VII-a: Giurconiu G. Mihail (VII: 664, 6.

Liceul de fete „Carmen Sylva", Timișoara.

Clasa VII-a: Vasii V. Victoria (VII: 662*, 4, 6*).

Liceul „C. Diaconovici Loga", Timișoara.

Clasa VI-a: Popescu Gr. D. (VI: 756; VII: 666; Șerengău Mihai (VI: 756, 7; VII: 664, 6); Tincu C. Constantin (VI: 754, 6, 7*, 9, 60, 62; VII: 657).

Liceul Militar „Mihai Viteazul", Timișoara.

Clasa V-a: Berceanu L. Corneliu (V: 755, 6, 7, 8, 9; VI: 753; VII: 664, 6); Cochela I. Liviu (V: 756); Filimon F. Ion (V: 756, 9, 64, 75); Iordănescu Virgil (V: 760); Rogoz V. Ioan (V: 755, 6, 9, 64); Streja N. Iorgu (V: 755, 6, 63, 4; VI: 753; VII: 664); Teodorescu At. Alexandru (V: 765*; VI: 753; VII: 664, 6); Vrânceanu G. Gheorghe (V: 760, 1, 3, 4, 5*, 6; VI: 753, 7, 8, 9, 60).
Clasa VI-a: Cârstoiu G. Nicolae (VI: 759, 60); Oprea Nifon (VI: 759, 60): Pavica A. Victor (VI: 759, 60); Popescu I. Barbu (VI: 752, 7*, 9, 60); Țecu P. Traian (VI: 757, 60); Valter Corneliu (VI: 759, 60).
Clasa VII-a: Pălăceanu D. Vasile (VII: 664, 5, 6).

Liceul „Sf. Haralambie", Turnu-Măgurele.

Clasa V-a: Hagiescu V. Mircea (V: 755).

Liceul de fete, Turnu-Severin.

Clasa VI-a: Firoiu I. Maria (VII: 664, 6).

Liceul „Traian", Turnu-Severin.

Clasa V-a: Brașoveanu Gheorghe (V: 755); Ionescu P. Aurel (V: 755): Pârșan C. Mihail (V: 755).
Clasa VI-a: Boldea D. Constantin (VI: 756; VII: 664, 6); Caravias Nicolae (VI: 664, 6); Săbiescu C. Stelian (VI: 759); Săceanu S. Constantin (VII: 664, 6).
Clasa VII-a: Dumitrescu G. Traian (VII: 670; VIII: 580); Ionescu P. Liviu (VII: 662, 4, 5, 6, 7); Prundeanu C. D. (VII: 662).
Clasa VIII-a: Alexandrescu I. Victor (VIII: 573, 5, 6, 7, 9, 80, 4); Caramalău V. Eugen (VIII: 573, 5, 6, 7, 8*, 9, 80); Ionescu G. Ion (VIII: 575, 6, 7); Nanu C. Gheorghe (VIII: 573, 5, 6, 9).

Liceul „M. Kogălniceanu" Vaslui.

Clasa VII-a: Popovici V. Dinu (VII: 662, 4, 5, 7); Zarojanu C. Gheorghe (VII: 662. 4, 5, 6, 7).

Elevi pregătiți în particular.

Clasa II-a: Siminică I. Vladimir (III: 213, 5, 6, 9).

Clasa V-a: Vânătoru S. Ion (V: 755).

Clasa VI-a: Pitiș L. Nicolae (VI: 759, 60, 3, 4, 5).

Clasa VII-a: Antonaș Șt. Otilia (VII: 662, 6); Burileanu O. Sanda (VII: 671*).

EXERCIȚII PROPUSE

Soluțiile exercițiilor propuse în acest număr se primesc până la 1 Iunie 1943

Clasa III-a. *Exerc. 225.* In triunghiul dreptunghiu ABC, catetele $\overline{AB}$ și $\overline{AC}$ sunt lungi de 5 cm și 12 cm. Perpendiculara din C pe BC taie pe AB în E. Să se calculeze lungimea segmentului $\overline{CE}$.

N. M.

III. 226. In triunghiul dreptunghic ABC catetele au lungimile: $\overline{AB} = 2{,}8$ cm și $\overline{AC} = 11$ cm. Ducem $\overline{BE} = 5$ cm, perpendiculară pe AB și $\overline{CF} = 5$ cm perpendiculară pe AC, amândouă înafara triunghiului. Să se calculeze lungimea segmentului $\overline{EF}$.

N. M.

III. 227. Se dă cercul (O) cu centrul O și raza R. Un al doilea cerc (I) cu raza 2R și care trece prin centrul O are coarda comună $\overline{MN}$ cu cercul (O). Dreapta centrelor OI taie cercul (O) în A și B, iar pe cercul (I) a doua oară în Q. Tangenta în A la cercul (O) taie cercul (I) în K și L, iar dreptele OL și OK taie a doua oară cercul (O) în C și D. Să se arate:

a) Coarda $\overline{CD}$ este latura triunghiului echilateral înscris în cercul (O).

b) Coarda comună $\overline{MN}$ este jumătatea tangentei duse din punctul Q la cercul (O).

O. N. Ț.

Clasa IV-a. *Exerc. 655.* Se dă sistemul de ecuaţii:

$$\frac{2x-5y-1}{12}-\frac{x+y+1}{3}=10x-11y+\frac{x+y}{2}+80$$

$$(x+y)^2+86=(x-y)^2+(x+1)(4y+2).$$

Se cere: 1°. Să se rezolve acest sistem de ecuaţii.

2°. Valorile găsite x şi y fiind respectiv *raza cercului de bază* şi *generatoarea* unui con circular drept VAB, să se afle suprafaţa laterală, suprafaţa totală şi volumul conului.

3°. La distanţa $\overline{VO'}=11{,}25$ dela vârf construind un plan de secţie paralel cu baza, să se afle raza bazei mici, generatoarea şi suprafaţa laterală a trunchiului de con obţinut.

V. Gh.

IV. 656. O sferă (O) cu centrul O şi rază R este tăiată de o sferă (I), cu raza 2R şi trecând prin centrul O, după un cerc (MN). Segmentul $\overline{OI}$ înţeapă sfera (O) în A, iar pânza conului cu vârful A şi baza cercul (MN) prelungită dincolo de vârf taie sfera (I) după cercul (PQ). Să se calculeze:

a) Generatoarele conurilor circulare drepte AMN şi APQ.

b) Suprafaţa laterală a trunchiului de con circular drept cu bazele cercurilor (MN) şi (PQ).

O. N. Ţ.

IV. 657. Se dau două sfere (O) şi (I) tangente exterior în punctul A, de raze r şi R. Să se afle suprafaţa laterală a trunchiului de con circular drept circumscris perechii de sfere date.

O. N. Ţ.

IV. 658. Se dă o sferă (O) de rază R şi un diametru al său $\overline{AD}$. Se construiesc sferele (I) şi (C) tangente sferei (O) în A şi D şi tangente între ele: *a)* Să se arate că suma ariilor (I) şi (C) este mai mică ca aria sferei date (O).

b) Ştiind că diferenţa ariilor sferelor (I) şi (C) este egală cu $\frac{1}{4}$ din aria sferei (O), să se determine diferenţa volumelor lor.

O. N. Ţ.

Clasa V-a. *Exerc. 775.* Să se rezolve sistemul:

$$x+y+z=10$$
$$xy+yz+xz=31$$
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{31}{30}\,\frac{1}{z}.$$

S. G.

V. 776. Să se rezolve sistemul:

$$2x+3y=12\ ,\quad x^2-y^2+3x-2y=10.$$

N. M.

V. 777. In triunghiul ABC dreptunghic în A, fie D piciorul perpendicularei din A pe ipotenuză şi E intersecţia paralelelor din C la AD şi din D la AB. Să se arate că $\overline{CD}$ este medie proporţională între $\overline{AD}$ şi $\overline{CE}$.

N. M.

V. 778. In triunghiul echilateral ABC, înălţimea din A taie cercul, descris pe latura $\overline{BC}$ ca diametru, în M şi N.

Să se arate, că:

$$\overline{AM}\cdot\overline{AN}=\frac{\overline{AB}^2}{2}.$$

N. M.

V. 779. Fie P un punct în interiorul unghiului XOY. Se notează cu M, N, Q proiecţiile lui P pe OX, OY şi pe bisectoarea unghiului O. Fie A proiecţia lui Q pe OY şi B intersecţia lui QA cu PM. Să se arate că triunghiul PBQ este isoscel.

Gh. B.

Clasa VI-a. *Exerc. 776.* Un triunghiu isoscel ABC $(\overline{AB}=\overline{AC})$ face o mişcare de rotaţie în planul său, în jurul vârfului A, situat pe un ax fix, din acelaşi plan cu triunghiul.

Să se studieze variaţia sumei distanţelor vârfurilor B şi C la axul dat.

V. Gh.

VI. 777. Să se arate că:

$$3\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} = 8\cos^2 x.$$

N. M.

VI. 778. Se consideră expresia:

$$E \equiv \cos 4x - \cos 3x + \cos 2x.$$

a) Să se facă expresia (E) calculabilă prin logaritmi.
b) Să se rezolve ecuaţia $E = 0$.

S. G.

VI. 779. Să se determine progresia aritmetică în care cunoaştem:

$$l = 135 \ , \ r = 3 \ , \ S = 522.$$

N. M.

VI. 780. Se dă o sferă (O) de rază R şi un diametru $\overline{AB}$ al ei. Pe prelungirea diametrului $\overline{BA}$ se ia un punct S, astfel ca $\overline{SA} = \frac{R}{2}$, şi se construieşte suprafaţa conică de rotaţie cu axa SB, iar unghiul de deschidere (al generatoarei cu axa) $\alpha = 30^0$. Conul taie sfera (O) după două cercuri (NN') şi (PP'). Să se calculeze suprafaţa laterală a trunchiului de con cu bazele (NN'), (PP'), înscris în sfera (O).

Aplicaţie: $R = 1$.

O. N. Ţ.

VI. 781. Se dă sfera (O) de rază R şi un diametru al său $\overline{AB}$. Fie C punctul pe $\overline{AB}$, care determină raportul $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{2}{1}$. Sferele (D) şi (E), având pe $\overline{AC}$ şi $\overline{CB}$ diametre, sunt tangente între ele şi tangente sferei (O). Fie S vârful conului tangent sferelor (D), (E) şi fie (PP'), (QQ') cercurile după care taie acest con sfera (O).

Să se calculeze aria zonei sferei (O) cuprinsă între cercurile (PP'), (QQ') când $R = 15$ cm.

O. N. Ţ.

Clasa VII-a. *Exerc. 690.* Să se discute sistemul:

$$(p-m)x-(n-p)y=1$$
$$(m-n)y-(p-m)z=1$$
$$(n-p)z-(m-n)x=1.$$

N. M.

VII. 691. Să se discute sistemul:

$$m(p-m)x-n(n-p)y=m+n$$
$$n(m-n)y-p(p-m)z=n+p$$
$$p(n-p)z-m(m-n)x=p+m.$$

N. M.

VII. 692. Să se deriveze funcţia:

$$y=\frac{2x-a-b}{(a-b)^3(x-a)(x-b)}+\frac{2}{(a-b)^4}\log\frac{x-a}{x-b}.$$

N. M.

VII. 693. Fie funcţia:

$$y=\frac{x+b-2a}{(x-a)(x-b)^3(a-b)}+\frac{2}{(x-b)^4}.\log\frac{x-a}{b-a}.$$

Să se arate, că

$$y'+\frac{4}{x-b}y=\frac{1}{(a-b)^2(x-a)^2(x-b)}.$$

N. M.

VII. 694. Să se studieze variaţia funcţiei:

$$y=\frac{x^3+2x^2}{x^2-2x+1}$$

şi să se construiască curba reprezentativă.

S. G.

VII. 695. Să se găsească

$$\lim_{x \to 1} y = \lim_{x \to 1} \left[\frac{1}{x^2 - 2x + 1} \cdot \log \frac{5x^2 + 3x + 2}{10} \right].$$

S. G.

VII. 696. Să se studieze variaţia funcţiei:

$$u = e^{xm} \sin mx$$

şi să se construiască curba reprezentativă.

O. N. Ţ.

Clasa VIII-a. *Exerc. 604.* Un cerc este tangent axei OX în A şi taie axa OY în B, C. A doua tangentă paralelă cu OX taie pe OY în D; a doua tangentă din D la cerc taie axa OX în U. Tangentele paralele cu OY taie pe OX în P, Q. Tangentele la cerc în B, C taie pe OX în B', C'. Să se arate că:

$$\overline{UP} \cdot \overline{UQ} = \overline{UO} \cdot \overline{UA} = \overline{UB'} \cdot \overline{UC'}.$$

N. M.

VIII. 605. Se consideră elipsa cu vârfurile A, A', focarele F, F' şi centrul O; parabola cu focarul F şi având ca directoare axa mică a elipsei determină în elipsă o coardă, care taie axa mare a elipsei în L. Să se arate, că:

$$\overline{OL} \cdot \overline{A'F} = \overline{OA}^2.$$

N. M.

VIII. 606. Se consideră iperbola cu vârfurile A, A', focarele F, F' şi centrul O; parabola cu focarul F şi având ca directoare simetrica axei netransverse faţă de F determină în iperbolă o coardă care taie axa transversă în L. Să se arată, că:

$$\overline{OL} = a \left(1 + \frac{e}{1 + e} \right)$$

a, *e* fiind *semiaxa* şi *excentricitate* a iperbolei.

N. M.

VIII. 607. M fiind un punct în planul unei parabole, perpendiculara din focar pe polara lui M în raport cu parabola taie tangenta la vârful parabolei într'un punct fix, când M se mută în plan paralel cu axa parabolei.

N. M.

VIII. 608. Să se rezolve ecuaţia:

$$x^3 - (a+3)x^2 + (2a+3)x - (a+1) = 0$$

ştiind că: $x_2 = ax_1 + 1$.

I. I. S.

VIII. 609. Să se studieze natura rădăcinilor ecuaţiei:

$$3x^4 + 4\alpha x^3 - 6\alpha^2 x^2 - 12\alpha^3 x + 11\alpha^2 = 0.$$

I. I. S.

VIII. 610. Fiind dată ecuaţia:

$$x^3 - (4+2\alpha)x^2 + (8+9\alpha)x - 12\alpha = 0,$$

să se determine α ştiind că între rădăcini avem relaţia $x_3 = x_1 + x_2$ şi să se rezolve apoi ecuaţia obţinută.

S. G.

VIII. 611. Se dă ecuaţia:

$$x^3 - (13 - 2\alpha)x^2 - (6+5\alpha)x + 6 + 4\alpha = 0.$$

Să se determine α astfel ca: $x_3 = x_1 x_2$ şi apoi să se rezolve ecuaţia obţinută.

S. G.

Exerciţii Generale. *Exerc. 518.* Să se găsească numerele de 1, 2 şi 3 cifre, care satisfac următoarelor operaţii aritmetice simultane:

$$\begin{array}{l} ab \times c = ade \\ \times \quad + \quad - \\ e \times fd = cd \\ \hline gf - fc = fe \end{array}$$

Gh. B.

E. G. 519. Dacă d_i reprezintă divizorii lui 100, să se calculeze sumele:

$$\Sigma\, d_i\, \varphi(d_i) \quad \text{şi} \quad \Sigma \frac{\varphi(d_i)}{d_i}.$$

I. L.

E. G. 520. Să se calculeze valoarea diferenţei:

$$\varphi\left(\sum_1^{10} i\right) - \sum_1^{10} \varphi(i),$$

unde $\varphi(i)$ reprezintă indicatorul lui i.

I. L.

E. G. 521. Dacă A şi B au aceeaşi factori primi, avem:

$$\varphi(A^a \cdot B^b) = B^b \cdot \varphi(A^a) = A^a \varphi(B^b).$$

I. L.

E. G. 522. Să se exprime valoarea indicatorului $\varphi(1.2.3.4... 10)$ în funcţie de $\varphi(1)$, $\varphi(2)$, $\varphi(3)$, $\varphi(4)$, ..., $\varphi(10)$.

I. L.

E. G. 523. Să se calculeze indicatorul lui 100 faţă de numerele dela 30 la 70.

I. L.

E. G. 524. Să se arate, prin consideraţii de indicatori, că

$$1^5 + 3^5 + 7^5 + 9^5 = \mathcal{M}10.$$

I. L.

E. G. 525. Să se calculeze produsul numerelor prime cu 30 şi subordonate lui 77, din şirul natural al numerelor până la 100.

I. L.

E. G. 526. Dacă $I_x(y)$ reprezintă numărul numerelor prime cu y din şirul numerelor naturale până la x, atunci în ce caz avem:

$$I_x(20) < I_5(20) + I_{x-5}(20).$$

I. L.

E. G. 527. In ce caz un număr dat este egal cu produsul părţilor lui alicote?

I. L.

INSTRUCȚIUNI

Pentru redactarea și trimiterea soluțiunilor exercițiilor publicate în *Gazeta Matematică Supliment cu exerciții* se vor avea în vedere *Instrucțiunile* publicate în numerele 1, 2, 3 pe copertă.

Drepturile de reproducere rezervate Societății «Gazeta Matematică».

Elevii claselor VI, VII și VIII, cu bogată activitate la această revistă își pot lărgi cadrul activității rezolvând probleme din „Gazeta Matematică".

In Biblioteca Societății „Gazeta Matematică" au apărut și se găsesc următoarele:

IV. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Mecanică.* Ediția II-a revăzută și adăogită de **Gabriela Țițeica** . . . . . Lei 350

VII. **Gh. Lazăr,** *Trigonometrie drept liniară* (după cursul predat de **Gh. Lazăr** la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu și G. Țițeica,** Vocabular Matematic . . . . . Lei 20

X. **G. Țițeica,** Culegere de Probleme de Geometrie . . . Lei 220

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. Istoric, învățăminte. Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 300 / pentru abonații G. M. și S. G. M. . . . Lei 150

XII. **V. Cristescu,** Culegere de Probleme de Trigonometrie. Partea I. (Goniometrie) revăzută și adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . Lei 140

XIII. **I. Ionescu,** Culegere de Probleme de Aritmetică. Partea I. Aritmetica rațională . . . . . Lei 250

XIV. **V. Cristescu,** Culegere de Probleme de Trigonometrie. Partea I-a. (Trigonometrie plană). Ediția II-a revăzută și adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 140

XV. **A. G. Ioachimescu,** Culegere de Probleme de Algebră. Partea I. Ediția IV-a revăzută și mărită . . . . . Lei 170

XVI. **G. Țițeica,** Culegere de Probleme de Geometrie Analitică. Partea I. Ediția II-a, adăogită de *N. G. Botea* . . . . . Lei 230

XVII. **A. G. Ioachimescu,** Culegere de Probleme de Algebră. Partea II-a. Ediția IV-a, revăzută și mărită . . . . . Lei 350

Biblioteca Istorică a GAZETEI MATEMATICE

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărțile I — VI de Geometrie plană) tradusă din limba greacă de *V. Marian* . . . . . Lei 250

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărțile VII—IX de Aritmetică și Cartea X a Iraționalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 300

III. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărțile XI—XIII de Geometrie în spațiu; Cartea XIV a lui HYPSICLE și Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 200

Biblioteca Matematică „GEORGE ȚIȚEICA"

I. **Ion Ionescu,** *Maxime și minime geometrice* . . . . . Lei 160

Suplimentul cu Exerciții. Abonamentul anual (9 numere) . . Lei 100

„Gazeta Matematică" apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 300 lei anual, se plătește înainte și începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului și nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele și toată corespondența se trimite pe adresa:

Societății „GAZETA MATEMATICĂ"

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviței No. 158. — București 2.

(Telefon: 3-9803).

M. O., IMPRIMERIA NAȚIONALĂ. — C. 15.935

GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCIŢII

ANUL IX. No. 7 1 APRILIE 1943

BIBLIOTECA CENTRALĂ
„ASOCIAŢIUNEA"
SIBIIU

Primele 5 numere ale Suplimentului pe acest an fiind epuizate, nu putem trimite noilor abonaţi decât numerele 6, 7, 8, 9, contra costului de 80 lei.

SOCIETATEA GAZETA MATEMATICĂ
CALEA GRIVIŢEI, 158. BUCUREŞTI 2. — TELEFON 3-9803

GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCIŢII

ANUL IX. No. 7 — 1 APRILIE 1943

ABONAMENTUL LEI 100 PE AN (9 numere)

Soluţii şi orice corespondenţă pe adresa:

Casa «Gazeta Matematică», Calea Griviţei 158. — Bucureşti 2

CONCURS DE MECANICĂ

(Regulamentul concursului a fost publicat în Nr. 3 al Suplimentului)

13. Un corp de greutate G este tras de o forţă F orizontală, pe un plan orizontal fără frecare, astfel încât după un timp t dela pornire capătă o vitesă v. Să se determine acceleraţia pe care o are acelaşi corp pe un plan înclinat sub $\sphericalangle \alpha$ faţă de orizontală, când 1) F se opune lunecării corpului pe plan; 2) F e în acelaşi sens cu lunecarea (F este paralelă cu planul înclinat). Să se determine sub ce unghiu θ, trebuie înclinat planul pentru ca corpul să se mişte cu viteză constantă, când asupra lui lucrează F paralelă cu planul.

14. Un corp de greutate G este aşezat pe un plan înclinat cu unghiul α faţă de orizontală, fără frecare. Pentru a împiedeca lunecarea se prinde de corp un fir paralel cu planul, care trece peste un mic scripete şi apoi la capătul celălalt atârnă o greutate P, astfel încât corpul e în repaos. Se mută apoi poziţia scripetelui astfel încât firul devine orizontal. Să se determine acceleraţia cu care corpul începe să se mişte pe plan.

15. Peste un scripete fără frecare situat în planul vertical se trece un fir. De un capăt atârnă o găleată goală de greutate G, de cealaltă parte atârnă o greutate $\frac{G}{2}$. Găleata ajunsă în apă este umplută cu apă (greutatea apei din găleată este tot G). Ce greutate trebuie adăogată greutăţii $\frac{G}{2}$, ca găleata plină să se urce cu aceeaşi acceleraţie γ cu cea dela scoborâre? Ce tensiune este în cele 2 faze ale mişcării?

16. Un tren are viteza de $50^{km}/_{oră}$. Se observă că picăturile de ploaie pe fereastră trasează drepte la 30^0 cu verticala. Presupunând viteza unei picături de ploaie constantă, cât este această viteză?

17. Efectele unei loviri fiind proporționale cu energia cinetică a proiectilului în momentul lovirii, să se determine efectele lovirii cu o piatră de masă m aruncată cu viteza v orizontală, de o persoană A asupra unei persoane B, în cazurile:

a) A și B sunt în repaos.

b) A este într'un vehicul care are o viteză $3v$; B e în repaos.

c) A este într'un vehicul cu viteză $3v$, iar B este într'un alt vehicul cu o viteză $3v$ de sens contrar cu a lui A.

Se presupune că piatra e aruncată de A perpendicular pe direcția mișcării vehiculelor, iar v este constant în tot timpul mișcării pietrii.

18. O pompă scoate pe oră 600 m^3 apă dela 250 m adâncime. Să se determine puterea în cai, Kw.

EXERCIȚII REZOLVATE

Exerciții generale. *E. G. 491. Dacă* $n(N)$ *reprezintă numărul divizorilor lui* N *și dacă* A *și* B *au aceiași factori primi, atunci:*

$$n(A) \cdot n(B) > n(A \cdot B)$$

$$n(A^p) \cdot n(B^q) > n[(A \cdot B)^{p+q}].$$

I. L.

Vom dovedi condiția a doua.

Fie $A = a^{\alpha_1} \cdot b^{\beta_1} \ldots$ și $B = a^{\alpha_2} \cdot b^{\beta_2} \ldots$, atunci avem:

$$(p\alpha_1 + 1)(p\beta_1 + 1) \ldots (q\alpha_2 + 1)(q\beta_2 + 1) \ldots$$

$$\ldots > [(p+q)(\alpha_1 + \alpha_2) + 1][(p+q)(\beta_1 + \beta_2) + 1] \ldots$$

Vom arăta că avem în parte:

$$(p\alpha_1 + 1)(q\alpha_2 + 1) > (p+q)(\alpha_1 + \alpha_2) + 1.$$

Sau:

$$p\alpha_2 \times q\alpha_1 > p\alpha_2 + q\alpha_1.$$

Adică produsul a doi factori este mai mare decât suma lor, dacă factorii sunt mai mari ca 2 sau cel puțin unul este egal cu 2.

Deci condiția este stabilită pentru $p \cdot \alpha_2 \geqslant 2$ și $q \cdot \alpha_1 \geqslant 2$, egalitatea nefiind valabilă decât numai la unul singur.

Dacă $p = 1$ și $q = 1$, ar trebui să avem:

$$n(A) \cdot n(B) > n[(A, B)^2].$$

Adică:

$$(\alpha_1 + 1)(\alpha_1 + 1) \ldots (\beta_2 + 1)(\beta_2 + 1) \ldots$$

$$\ldots > [2(\alpha_1 + \alpha_2) + 1] \cdot [2(\beta_1 + \beta_2) + 1] \ldots$$

Sau:

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 > \alpha_1 + \alpha_2.$$

Deci $\alpha_1 \geqslant 2$ și $\alpha_2 \geqslant 2$, condiția de egalitate fiind valabilă numai la unul singur.

In consecință prima neegalitate este sigură în orice caz.

I. L.

E. G. 492. Dacă $s(N)$ *reprezintă suma divizorilor lui* N, *atunci avem:*

$$s(A) \cdot s(B) > s(A \cdot B).$$

I. L.

In cazul când A și B au factori primi diferiți, atunci neegalitatea devine egalitate și este ușor de stabilit.

In cazul când A și B au aceeași factori primi, atunci, după exponenți, avem neegalități parțiale de genul:

$$\frac{a^{\alpha_1+1} - 1}{a - 1} \cdot \frac{a^{\beta_1+1} - 1}{a - 1} > \frac{a^{\alpha_1+\beta+1} - 1}{a - 1}.$$

Care se reduce la:

$$a^{\alpha_1+\beta_1} + 1 > a^{\alpha_1} + a^{\beta_1}.$$

Neegalitatea este evidentă pentru $a > 1$ și $\alpha_1 \geqslant 1$ și $\beta_1 \geqslant 1$.

I. L.

E. G. 493. Care este cel mai mic număr, de două cifre, care are zece *divizori?*

I. L.

Dacă numărul are un singur factor prim a, atunci exponentul lui este 9. Dar chiar pentru $a = 2$, dăm peste un număr mai mare de două cifre.

Dacă numărul are doi factori primi: a şi b, atunci exponenţii lor pot fi: 1 şi 4 sau 4 şi 1.

Dar cel mai mic număr de două cifre, în acest caz, nu poate fi decât $2^4 . 3^1 = 48$.

Numărul nu poate avea trei sau mai mulţi factori primi.

I. L.

E. G. 495. Să se arate că, în intervalul de numere consecutive dela 100 la 1000 sunt de 90 de ori atâtea numere prime cu 10, câte sunt dela 1 la 10.

I. L.

Trebuie să arătăm că:

$$I_{100 \to 1000}(10) = 90 . I_{1 \to 10}(10)$$

Dar avem:

$$I_{100 \to 1000}(10) = I_{1000}(10) - I_{100}(10).$$

Apoi:

$$I_{1000}(10) = 1000 - (500 + 200) + 100 = 400$$

$$I_{100}(10) = 100 - (50 + 20) + 10 = 40.$$

Şi:

$$I_{1 \to 10}(10) = \varphi(10) = 4.$$

Prin urmare:

$$I_{100 \to 1000}(10) = 400 - 40 = 360 = 90 \times 4$$

$$I_{1 \to 10}(10) = 4.$$

I. L.

E. G. 496. Să se arate că, suma numerelor prime cu $N = 2^\alpha . 3^\beta$ *şi mai mici ca el, este mai mare ca suma divizorilor lui.*

I. L.

Trebuie să arătăm că:

$$\sigma(2^\alpha . 3^\beta) > s(2^\alpha . 3^\beta).$$

Dar:

$$\sigma(2^\alpha . 3^\beta) = \frac{1}{2}(2^\alpha . 3^\beta) . \varphi(2^\alpha . 3^\beta) = 2^{2\alpha-1} . 3^{2\beta-1}$$

$$s(2^\alpha . 3^\beta) = (2^{\alpha+1} - 1) \cdot \frac{3^{\beta+1} - 1}{2}.$$

Deci:

$$2^{2\alpha} . 3^{2\beta-1} > (2^{\alpha+1} - 1) . (3^{\beta+1} - 1).$$

Dacă am considera în membrul al doilea factorii $2^{\alpha+1}$ şi $3^{\beta+1}$, neegalitatea devine:

$$2^{\alpha-1} \cdot 3^{\beta-2} > 1$$

care este evidentă pentru $\alpha > 1$ şi $\beta \geqslant 2$.

Pentru $\alpha = 1$ şi $\beta = 2$ o simplă verificare numerică ne arată că neegalitatea subzistă.

De asemenea pentru $\alpha = 2$ şi $\beta = 2$, precum şi pentru $\alpha > 2$ şi $\beta = 1$.

Neegalitatea nu subzistă pentru celelalte valori.

I. L.

E. G. 497. Dacă $S_x(y)$ *reprezintă suma numerelor prime cu* y *din şirul natural al numerelor până la* x, *atunci să se calculeze suma:*

$$S_{100}(21) + S_{21}(100).$$

I. L.

Avem:

$$S_{100}(21) = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot (100+1) - \left[\frac{3}{2} \cdot 33 \cdot 34 + \frac{7}{2} \cdot 13 \cdot 14\right]$$

$$+ \left[\frac{21}{2} \cdot 4 \cdot 5\right] = 5050 - 2320 + 210 = 2940$$

$$S_{21}(100) = \frac{1}{2} \cdot 21 \cdot (21+1) - \left[\frac{2}{2} \cdot 10 \cdot 11 + \frac{5}{2} \cdot 4 \cdot 5\right]$$

$$+ \left[\frac{10}{2} \cdot 2 \cdot 3\right] = 231 - 160 + 30 = 101.$$

Prin urmare

$$S_{100}(21) + S_{21}(100) = 3041.$$

I. L.

E. G. 498. Să se arate că:

$$\left(\frac{100!}{50!}\right)^4 - 1 = M101.$$

I. L.

In *E. G. 483.* (Supl. Nr. 6, IX) am arătat că, dacă p este prim, avem:

$$\frac{\left(\frac{p-1}{2}+1\right)\left(\frac{p-1}{2}+2\right)\ldots(p-1)}{\left(\frac{p-1}{2}\right)!} = Mp \pm 1.$$

Inmulțind cu $\left(\frac{p-1}{2}\right)!$ ambii membri, obținem:

$$\frac{(p-1)!}{\left(\frac{p-1}{2}\right)!} = Mp \pm \left(\frac{p-1}{2}\right)!$$

Inmulțind apoi între ele aceste două egalități care rezultă, obținem:

$$\left[\frac{(p-1)!}{\left(\frac{p-1}{2}\right)!}\right]^2 = Mp - \left[\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right]^2.$$

Dar, tot la *E. G. 483* am arătat că avem:

$$\left[\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right]^2 \pm 1 = Mp.$$

Prin urmare egalitatea de mai sus devine:

$$\left[\frac{(p-1)!}{\left(\frac{p-1}{2}\right)!}\right]^2 = Mp \pm 1.$$

Inmulțind între ele aceste ultime două egalități, avem:

$$\left[\frac{(p-1)!}{\left(\frac{p-1}{2}\right)!}\right]^4 = Mp - 1.$$

In cazul exercițiului 498 avem: $p = 101$.

I. L.

Până la 1 Martie 1943 s'au primit soluții bune (la exercițiile propuse în numerele 4, 5, 6 ale anului al IX-lea)(*) dela:

Liceul de fete, Arad.

Clasa VIII-a: Dănescu Gr. Agripina (VIII: 594); Păunescu Gh. Liliana (VIII: 578); Vărșăndan Veturia (VIII: 594).

Liceul „Moise Nicoară", Arad.

Clasa VII-a: Colan Gh. Horia (VII: 676, 7, 80, 3*, 6*); Fântânar V. Tiberiu (VII: 676, 7, 80, 3*, 6*); Șiclovan S. Lucian (VII: 676, 83*, 6*).
Clasa VIII-a: Popa T. Teodor (VIII: 580, 5*, 8, 9*, 91*, 6*, 9, 601*).

Liceul „Gh. Codreanu" Bârlad.

Clasa VI-a: Manoliu Sp. Mihai (VI: 758*, 9*, 60*, 1, 4, 5*, 75).

Liceul „Samuil Vulcan", Beiuș.

Clasa V-a: Costea D. Florian (V: 761, 4, 6, 8, 70, 1).
Clasa VI-a: Ardeleanu V. Aurel (VI: 759; E. G.: 494, 5, 512); Goldiș G. (E. G.: 493, 5); Hodișan V. Florian (VI: 760; E. G.: 495); Logofătu M. Tănase (VI: 759, 60; E. G.: 493, 5).
Clasa VII-a: Drimba E. Iosif (VII: 676, 86*, 3); Muțiu Antim (VII: 676*, 9, 71, 3, 80, 5).

Liceul de fete, Brăila.

Clasa V-a: Vlad M. Sevastia (V: 770).

Liceul „N. Bălcescu", Brăila.

Clasa V-a: Novac I. Ioan (V: 764; VII: 671).
Clasa VI-a: Boerescu N. Cezar (VI: 759, 61, 3; VII: 683; E. G: 499); Constantinescu V. Ilie (VI: 763, 9, 70, 1, 2).
Clasa VIII-a: Țigănoiu Alexandru (VIII: 576, 8).

Liceul de fete „Carmen-Sylva", București.

Clasa IV-a: Maxim M. Magdalena (IV: 647).
Clasa VII-a: Damian C. Lucia (VII: 667*, 80*); Maxim M. Viorica (VII: 680, 4*, 5*, 6*).

Liceul de fete „Iulia Hasdeu", București.

Clasa III-a: Barbu Ana (III: 215, 6); Nedelcu M. Emilia (III: 216, 9).

---

*) Numărul unui exercițiu foarte bine rezolvat și îngrijit redijat este însoțit de semnul *.

Şcoala Centrală de fete, Bucureşti.

Clasa VII-a: Teodorescu C. Maria (VII: 676, 7, 80*).

Institutul „Sf. Elena", Bucureşti.

Clasa VIII-a: Burculeţ M. Mihaela (VIII: 580, 1*, 2*, 6, 92, 4*, 6*, 8*, 9*, 601*; E. G.: 497).

Institutul „Notre Dame de Sion", Bucureşti.

Clasa VII-a: Buruiană D. Mariana (VII: 676, 80, 8).

Liceul „Aurel Vlaicu", Bucureşti.

Clasa V-a: Barbaiani A. Mihai (V: 760; VI: 758); Leon Al. Mihail (V: 760; VI: 758; E. G.: 482, 6).

Clasa VI-a: Lăzărescu A. Ion (VI: 756; VII: 664, 6).

Clasa VII-a: Marinescu Emil (VII: 760, 2, 5, 7, 71).

Liceul „Matei Basarab", Bucureşti.

Clasa VI-a: Cristea I. Paul (VI: 759, 60, 4, 5, 73*); Ieşan Şt. Alexandru (VI: 764*, 8*, 71, 2, 3*; E. G.: 478, 9, 80, 5, 6, 93); Muntz M. Eduard (VI: 758, 9, 60, 1, 5, 73*; VIII: 680, 3, 5, 6).

Clasa VII-a: Antonescu D. Eugen (VII: 669, 70, 2, 84, 5*, 6*).

Liceul „D. Cantemir", Bucureşti.

Clasa VI-a: Cociuman D. Anton (VI: 759).

Liceul „Spiru Haret", Bucureşti.

Clasa V-a: Mihalache M. Şt. (E. G.: 480).

Clasa VII-a: Lazăr S. Luca (VII: 685*, 6*).

Clasa VIII-a: Teodorescu T. Aristide (VIII: 580*, 96*, 8*, 9*, 600*, 1*, 2*).

Liceul „Gheorghe Lazăr", Bucureşti.

Clasa VI-a: Stratulatin C. Mircea (VI: 754).

Clasa VII-a: Timotin Al. Alexandru (VII: 670, 1, 80*, 5*; E. G.: 490); Săftoiu I. E. (E. G.: 491, 3, 502).

Liceul „Titu Maiorescu", Bucureşti.

Clasa V-a: Ardare N. Nicolae (V: 770*); Timiş A. Dumitru (V: 760*, 3, 4, 6, 9*, 70*, 1*).

Clasa VI-a: Cantuniar Cristu (VI: 760, 1*, 4, 5, 75); Coandă Valentin (VI: 760): Dobrescu Al. Constantin (VI: 759, 60); Ghiaţă Vladimir (VI: 760, 1*); Mateescu G. Arghir (VI: 759, 60, 5); Mustăcescu V. Traian (VI: 758, 9, 60, 1*, 2; VIII: 580); Păunescu C. Victor (VI: 759, 60, 1*, 2, 4); Stancu Z. Florea (VI: 759, 60, 1, 2); Ulieru C. Mihail (VI: 760).

Clasa VII-a: Girescu N. A. (E. G.: 480); Manasian M. Dragoş (VII; 680, 6).

Clasa VIII-a: Burghiu D. Ioan (VIII: 580, 90, 6*, 8*, 601*, 2*); Pleanu Ioan (VIII: 580, 96*, 8*, 602*); Radu C. Narcis (VIII: 580, 96*, 9*); Rădulescu G. Ştefan (VIII: 580, 96*, 8*, 601*, 2*); Scheancu V. Nicolae (VIII: 596*, 8*, 601*)

Colegiul Naţional „Sf. Sava", Bucureşti.

Clasa IV-a: Dumitrescu F. Sorin (IV: 646; VI: 758).

Clasa V-a: Săvescu A. Mircea (V: 770*).

Clasa VII-a: Dumitrescu F. Dan (VII: 669, 71); Horbuniev P. Vasile (VII: 669, 71); Mişicu Mircea (VII: 586, 96, 8, 9*, 601).

Liceul „Gheorghe Şincai", Bucureşti.

Clasa VI-a: Daniilescu C. Constantin (VI: 758, 9*, 60, 1).

Clasa VIII-a: Constantinescu I. Mihai (VIII: 573*, 5*, 6, 7*).

Liceul „Mihai Viteazul", Bucureşti.

Clasa VII-a: Ionescu G. Tudorel (VII: 676, 7*, 8*, 9, 80, 1, 6*).

Liceul „Sf. Iosif" Bucureşti.

Clasa VI-a: Leţia L. Valentin (VI: 759*, 60*, 1*, 2, 3*, 4*, 5*, 8*).

Liceul Internat, Buftea.

Clasa V-a: Bădulescu Cezar (V: 752*, 64); Zanetti Nicolae (V: 771).

Liceul „B. P. Haşdeu", Buzău.

Clasa VII-a: Ionescu V. O. (E. G.: 505); Popescu I. Chiril (VII: 685, 6); Ştirbulescu E. Ion (VII: 669*, 71, 2, 3).

Liceul „Dr. Ioan Meşotă", Braşov.

Clasa IV-a: Ionescu Şt. Ion (IV: 647, 8).

Liceul „Ştirbei-Vodă", Călăraşi.

Clasa IV-a: Guriţă V. Ion (IV: 653); Panait I. Ilie (IV: 648, 67).

Clasa V-a: Popovici G. Doru (V: 770*, 1*).

Clasa VIII-a: Dima N. Ştefan (VIII: 596*, 601*); Ionescu C. Victor (VIII: 596*, 601*); Stoenescu Ioan (VIII: 596*, 601*).

Liceul Militar Cernăuţi.

Clasa V-a: Cârstea P. Stan (V: 764, 6, 72); Constantinescu C. Emil (V: 772); Grigoraş Gh. Gheorghe (V: 766, 72); Marinescu C. Stelian (V: 764, 6, 72); Negulescu D. Ionel (V: 764, 6, 72); Nicolescu C. Corneliu (V: 772); Roşca I. Emil (V: 772).

Clasa VII-a: Balaş Ovidiu (VII: 680); Gaius Tănase (VII: 680, 1, 4, 9); Nicolescu T. Ioan (VII: 680); Ranga A. Constantin (VII: 680); Soare M. Mircea (VII: 680, 1, 4, 9); Spirescu Nicolae (VII: 680, 1); Staicu S. C. (VII: 680, 4, 6, 9; E. G.: 490, 3, 6).

Clasa VIII-a: Bănescu Mircea (VIII: 596); Bărbuceanu N. Gheorghe (VIII: 596); Popa S. Gane (VIII: 590, 6, 8); Popa G. Gheorghe (VIII: 598); Popescu Gh. Gheorghe (VIII: 584).

Liceul „Aron Pumnul", Cernăuți.

Clasa VIII-a: Bordian V. Nectarie (VIII: 578, 96*, 601*).

Liceul Militar „Regele Ferdinand I", Chișinău.

Clasa VIII-a: Gusti Ed. Ștefan (VIII: 580*, 6, 9, 92); Hârjiu Gheorghe (VIII: 589, 90); Popescu L. Ovidiu (VIII: 580, 5, 6, 9, 90, 2).

Liceul „Mircea cel Bătrân", Constanța.

Clasa V-a: Marderos Andreiaș (V: 770, 1).
Clasa VII-a: Gheorgic M. Gheorghe (VIII: 677, 80*).

Liceul de fete „Elena Cuza", Craiova.

Clasa III-a: Georgescu C. Gabriela (VIII: 221).
Clasa IV-a: Dumitrescu C. Cornelia (IV: 647, 8); Nicu M. Paraschiva (IV: 647, 8); Papanaum I. Domnica (IV: 648, 9).
Clasa V-a: Grămescu R. Ant. (V: 768, 70); Jienescu I. Marilena (V: 768, 70).

Colegiul Național „Carol I", Craiova.

Clasa IV-a: George M. Nicolae (IV: 643*, 7; V: 755*, 6*, 63; VII: 664, 6; E. G.: 493).

Liceul Internat, Iași.

Clasa V-a: Marta C. Liviu (V: 765, 6, 8).
Clasa VII-a: Ionescu O. Virgil (VII: 669, 71).

Liceul Militar, Iași.

Clasa III-a: Andrian T. George (III: 223); Asandei N. Nicolae (III: 217, 23); Baștа Mircea (III: 217); Bosinceanu P. Pavel (III: 223); Botezatu I. Ioan (III: 217, 23); Cririac Mircea (III: 217, 23); Ciobanu I. Iosif (III: 217); Ciobănică Gh. Mircea (III: 223); Corduneanu Constantin (III: 217); Crivăț C. Gheorghe (III: 217); Drăghicescu Constantin (III: 217, 8, 23); Dabija Paul (III: 217); Filip V. Ioan (III: 217); Foghel D. Gheorghe (III: 217, 23); Gongu I. Răducanu (III: 217, 23); Gheorghe C. Dorin (III: 217); Hociung I. Romeo (III: 223); Huideș Alexandru (III: 217); Mardare Mihai (III: 217, 23); Melinte I. Liviu (III: 217, 23); Munteanu Petru (III: 217); Nichita I. Constantin (III: 217, 23); Păstrăvanu Gr. E. Dec. (III: 217, 23); Pavel N. Clement (III: 217, 23); Platan C. Florin (III: 217); Popa P. Paul (III: 217); Popescu I. Mircea (III: 217); Rădulescu Mihai (III: 223); Toma Gh. Octavian (III: 223); Tofan C. Aurel (III: 217, 8, 23); Vlad Radu (III: 217, 23); Zaharescu E. Gh. (III: 217).
Clasa IV-a: Calcan V. Victor (IV: 653); Diaconu D. Gheorghe (IV: 653); Moraru Gh. Constantin (IV: 653); Munteanu Sorin (IV: 653); Palade V. C. (IV: 653); Paraschivescu C. Marcu (IV: 653); Vlad Mircea (IV: 645, 53).

Clasa V-a: Bârzescu Mircea (V: 760).

Clasa VI-a: Ignat Gh. M. (VI: 774); Petrescu V. (VI: 774); Teodorescu C. C. (VI: 774); Vintilă Gh. C. (VI: 774).

Clasa VII-a: Palade Tudorache (VII: 669, 71, 2); Vasiliu D. Gh. (E. G.: 486).

Clasa VIII-a: Marinescu I. (VIII: 590).

Liceul de fete, Piatra-Neamț.

Clasa VII-a: Săcărescu E. Maria (VII: 676, 80, 6*).

Liceul „I. C. Brătianu" Pitești.

Clasa VII-a: Ciuvică I. Corneliu (VII: 669, 76, 80, 4, 6*); Retevoescu I. Gheorghe (VII: 669, 76).

Liceul „Sf. Petru și Pavel", Ploești.

Clasa V-a: Constantinescu R. D. Mihai (V: 760, 3; E. G.: 486).

Clasa VII-a: Alexandrescu I. Florin (VIII: 581).

Colegiul Național „N. Filipescu", Predeal.

Clasa VI-a: Marinescu C. Marinel (VI: 758, VII: 669); Columbeanu D. P. (E. G.: 491, 3, 502, 7).

Clasa VII-a: Iliescu C. C. (E. G.: 482, 6).

Liceul „Eudoxiu Hurmuzachi", Rădăuți.

Clasa VII-a: Bocancea E. Octavian (VII: 669, 70, 1*).

Gimnaziul mixt Sânnicolaul-Mare.

Clasa IV-a: Alexa Gh. Adrian (IV: 627, 36*, 9, 40, 2*, 3, 7*, 8*; V: 751*, 2*, 3, 5, 64*).

Gimnaziul „Principele Nicolae", Sinaia.

Clasa IV-a: Bontea Gr. Ana (IV; 644); Kiș Eugen (IV: 644); Koman Enoiu (IV: 644).

Liceul de fete „Carmen Sylva", Timișoara.

Clasa VIII-a: Măran I. Ana (VIII: 589, 96*.

Liceul „C. Diaconovici Loga", Timișoara.

Clasa VI-a: Popescu G. D. (VI: 764, 5); Sârbu I. Iancu (VI: 760; E. G.: 493); Tincu C. Constantin (VI: 764*, 5, 72*, 3; VIII: 580; E. G.: 493).

Liceul Militar „Mihai Viteazul", Timișoara.

Clasa IV-a: Stanciu V. Petre (IV: 643).

Clasa V-a: Cochela I. Livius (V: 770, 2); Strejea Iorgu (V; 770); Iordăchescu Virg. (VI: 773); Vrânceanu Gh. (V: 762*, 7*, 8*, 9*, 70*, 1*, 2*, 3, 4*; VI: 761*, 2*, 4, 5, 71*, 2, 3, 5; E. G.: 499).

Clasa VI-a: Bacicu D. Virgil (VI: 759*, 60, 1, 2, 4); Bancu G. Emilian (VI: 759, 60); Biriţeică S. Petre (VI: 759, 60); Cârstoiu Gh. Nicolae (VI: 760, 4): Dinu M. Petre (VI: 759, 60); Grigorescu Ion (VI: 759); Milea V. Viorel (VI: 759, 60); Minculescu C. Emilian (VI: 759, 60); Nedelcu U. (VI: 758, 60); Oprea D. Nifon (VI: 758, 61, 2, 4*, 5); Pavică A. Victor (VI: 764, 5*; E. G.: 499*); Popescu I. Barbu (VI: 758, 9, 60, 1*, 4*, 5); Strati P. Ioan (VI: 758, 9, 60); Ţocu P. Traian (VI: 758, 9, 61); Vineş I. Coman (VI: 759, 60).

Clasa VIII-a: Oprea D. Gheorghe (VIII: 585, 96*, 7*, 8*, 603).

Liceul „Tudor Vladimirescu", Târgu-Jiu.

Clasa VII-a: Gâţă G. Gheorghe (VII: 669*, 70, 1, 2, 3, 5); Giurconiu Gh. Mihail (VII: 669, 71, 5, 84).

Liceul „Sf. Haralambie", Turnu-Măgurele.

Clasa VIII-a: Vasilescu N. Vasile (VIII: 589, 9, 96*, 601*).

Liceul teoretic de fete, Turnu-Severin.

Clasa V-a: Smeu D. Ileana (V: 764); Ştefan I. Olga (V: 763*, 4).

Clasa VI-a: Boiangiu D. Frida (VI: 760).

Liceul „Traian", Turnu-Severin.

Clasa IV-a: Sălăgeanu Traian (IV: 647, 8).

Clasa V-a: Caramaliu D. V. (V: 770*).

Clasa VI-a: Boldea O. Constantin (VI: 759, 60, 1, 5, 71, 2, 3*; VII: 669, 83; VIII: 596, 8, 9, 601, 2; E. G.: 486); Cleanoveanu Alexandru (VI: 759, 60); Deatcu I. Daniel (VI: 760); Pătăşanu D. Valeriu (VI: 759, 60); Păuţă I. Gheorghe (VI: 759, 60); Pletea C. Strate (VI: 759, 60); Predescu C. Ion (VI: 759, 60); Săbiescu C. Stelian (VI: 659, 60); Săceanu S. C. (VI: 758); Trăilă Petru (VI: 759, 60).

Clasa VII-a: Bogdan P. Constantin (VII: 669*, 71, 3, 5); Graur A. Cornéliu (VII: 669, 76); Ionescu P. Liviu (VII: 669*; 71, 5; E. G.: 490); Kisch I. L. (VII: 669, 76); Vlăduţ St. I. (VIII: 676).

Clasa VIII-a: Alexandrescu I. V. (E. G.: 486); Caramlău V. Eugen (VIII: 586, 7).

Elevi pregătiţi în particular.

Clasa VII-a: Bucureşti. Burileanu O. Sanda (VII: 680, 5*).

Clasa VIII-a: Bucureşti. Ţigănoiu Al. (VIII: 596*, 7*, 601*).

Clasa VI-a: Caracal. Barbu A. Ion (VI: 759).

Clasa VIII-a: Craiova. Ionescu F. Petre (VIII: 566, 76; E. G.: 472*, 90*).

Clasa VI-a: Mizil. Pitiş N. (E. G.: 491, 505).

EXERCIȚII PROPUSE

Soluțiile exercițiilor propuse în acest număr se primesc până la 1 Iulie 1943

Clasa III-a. *Exerc. 228.* Se dă un cerc (O) și un triunghiu echilateral ABC înscris în acest cerc. Tangentele în A și C la cercul (O) se întâlnesc în P, dreapta BP taie cercul în D, iar tangenta la cercul (O) în D taie în M și N respectiv pe AP și CP. Să se arate, că triunghiul MNP este asemenea cu ABC și să se determine raportul de asemănare. Să se deducă aria MNP știind că raza cercului (O) este R = 15 cm.

O. N. Ț.

III. 229. Fie triunghiul echilateral ABC; $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ înălțimile lui și H punctul lor de întâlnire.

1°. Să se construiască pe latura BC un punct M astfel ca:

$$\frac{\overline{BM}}{\overline{MC}} = \frac{\overline{A'H}}{\overline{HA}}.$$

2°. Din punctul M construim paralela $\overline{MN}$ la BB' întâlnind pe CA în N, apoi din N paralela $\overline{NP}$ la CC' întâlnind pe AB în P. Să se arate, că $\overline{PM}$ este paralelă la AA'.

3°. Să se arate, că triunghiul MNP este asemenea cu ABC și să se exprime aria lui S' în raport cu aria S a triunghiului ABC.

O. N. Ț.

III. 230. Fie triunghiul echilateral ABC; $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ înălțimile lui, iar H punctul lor de întâlnire. Fie M un punct pe latura BC astfel că:

$$\frac{\overline{BM}}{\overline{MC}} = \frac{\overline{A'H}}{\overline{HA}}.$$

Paralela din M la BB' taie pe CA în N, iar paralela din N la CC' taie pe AB în P. Fie $\overline{NN'}$, $\overline{PP'}$, $\overline{MM'}$ medianele triunghiurilor MNC, NPA, PMB.

1°. Să se arate că triunghiurile MNP și M'N'P' sunt egale.

2°. Să se exprime aria exagonului MN'NP'PM' cu ajutorul ariei S a triunghiului ABC.

O. N. Ț.

Clasa IV-a. *Exerc. 659.* Să se verifice identitatea:

$$\frac{1}{(m-n)^2}+\frac{1}{(p-m)^2}+\frac{2}{p-n}\left[\frac{1}{m-n}+\frac{1}{p-m}\right]=\frac{(p-n)^2}{(m-n)^2(p-m)^2}.$$

N. M.

IV. 660. Câte feluri de piramide triunghiulare pot fi construite cu toate feţele triunghiuri egale?

Ce proprietate au toate unghiurile triedre ale acestor piramide?

Să se dea un mod de construire al acestor piramide.

O. N. Ţ.

IV. 661. Fie o piramidă ABCD având toate muchiile egale şi fie *a* lungimea comună a muchiilor. Să se calculeze *aria* şi volumul conului circular drept având vârful în A şi drept bază cercul circumscris triunghiului BCD.

O. N. Ţ.

IV. 662. Fie ABCD o piramidă triunghiulară având trei perechi de muchii opuse egale:

$$\overline{AB}=\overline{CD}\ ;\ \overline{AC}=\overline{BD}\ ;\ \overline{AD}=\overline{BC}.$$

Să se arate, că distanţele celor patru vârfuri la feţele opuse sunt egale:

$$\overline{AA'}=\overline{BB'}=\overline{CC'}=\overline{DD'}.$$

O. N. Ţ.

Clasa V-a. *Exerc. 780.* Dacă asupra ecuaţiei:

$$f(x)\equiv ax^2+bx+c=0$$

facem schimbarea:

$$x=\frac{\lambda y-c}{ay+(\lambda+b)},$$

cu λ arbitrar, să se arate, că ecuaţia $g(y)=0$ obţinută are rădăcinile egale cu ale ecuaţiei $f(x)=0$.

N. M.

V. 781. Să se pună sub formă de produs suma:

$$E \equiv a^2 (x - b)^2 + (x^2 + y^2 - bx)^2 + (a^2 + b^2) y^2.$$

G. D. S.

V. 782. Se dau două puncte A şi B, apoi o dreaptă D paralelă cu AB. Să se construiască un punct C pe dreapta D, astfel ca bisectoarea unghiului format de dreapta D şi CA, să treacă prin B. Discuţie.

G. D. S.

V. 783. O paralelă la latura BC a triunghiului oarecare ABC întâlneşte laturile AB şi AC respectiv în M şi N.

1°. D fiind mijlocul laturii BC, să se determine raportul $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$ (exprimat cu elementele triunghiului dat) astfel ca $\sphericalangle MDN$ să fie drept.

2°. Să se demonstreze că în acest caz segmentul MN este *media armonică* între mediana $\overline{AD}$ şi jumătatea laturii $\overline{BC}$.

G. D. S.

V. 784. Fie $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ înălţimi în triunghiul ABC cu ortocentrul în H. Se notează cu A_1 şi A_2 intersecţiile bisectoarelor unghiurilor BC'C, CB'B şi AC'C, AB'B. Se notează cu A_3 şi A_4 intersecţiile bisectoarelor unghiurilor BC'C, AB'B şi BB'C, AC'C.

Să se arate, că figurile BA_1CA_2 şi AA_3HA_4 sunt patrate.

GH. B.

Clasa VI-a. *Exerc. 782.* Se consideră un paralelogram ABCD. O dreaptă (Δ), paralelă cu BC şi DA, taie pe AB în M şi pe CD în N. Altă dreaptă (Δ'), paralelă cu CD şi AB, taie pe BC în M' şi pe DA în N'. Fie O_1, O_2, O_3, O_4 centrele paralelogramelor AMND, MBCN, M'CDN', ABM'N'. Să se demonstreze, că variind dreptele (Δ), (Δ'), aria patrulaterului $O_1O_2O_3O_4$ rămâne constantă.

V. GH.

VI. 783. Ştiind că *a*, *b*, *c*, *d* sunt cei patru termeni ai unei *proporţii*, să se descompună în factori expresia:

$$E \equiv ab + cd + \frac{bc}{\sin\alpha \cos\alpha}.$$

G. D. S.

VI. 784. Ştiind că a, b, c, d sunt cei patru termeni ai unei *proporţii*, să se descompună în factori expresia:

$$E \equiv ab + bc + cd \sin^2\alpha \cos^2\alpha.$$

G. D. S.

VI. 785. Să se descompună în factori expresia:

$$E \equiv m^2 + \frac{mn}{\sin\alpha \cos\alpha} + n^2.$$

G. D. S.

VI. 786. Să se arate că expresiile:

$$E_1 \equiv \sin(a + x)\cos(b - x) - \sin(a - b + x)\cos x$$

$$E_2 \equiv \cos(a + x)\sin(b - x) + \sin(a - b + x)\cos x$$

$$E_3 \equiv \sin(a + x)\sin(b - x) + \sin(a - b + x)\sin x$$

$$E_4 \equiv \cos(a + x)\cos(b - x) - \cos(a - b + x)\cos x$$

sunt independente de x.

Să se găsească şi alte expresii asemănătoare, independente de x.

G. D. S.

VI. 787. Să se arate, că înafară de tetraedrul regulat, mai sunt alte tetraedre pentru care toate feţele sunt triunghiuri egale. Intre aceste tetraedre nu este niciunul pentru care feţele să fie triunghiuri dreptunghice.

O. N. Ţ.

Clasa VII-a. *Exerc. 697.* Care este limita produsului:

$$P = \sqrt[\alpha]{a} \cdot \sqrt[\alpha^2]{a^2} \cdot \sqrt[\alpha^3]{a^3} \ldots \sqrt[\alpha^n]{a^n} \ldots$$

când $n \to \infty$.

I. I. S.

VII. 698. Să se reprezinte funcţia:

$$y = -2 \pm \sqrt{4 + 2x - x^2}.$$

N. M.

VII. 699. Intr'un cerc (O) este înscris un triunghiu echilateral ABC. Pe laturile triunghiului ABC şi în sensul ABC, se iau segmentele:

$$\overline{AM} = \overline{BN} = \overline{CP} < \overline{AB}.$$

Dreapta MN taie arcele AB şi BC în D şi E; NP taie arcele BC şi CA în F şi G; iar PM taie arcele CA şi AB în H şi I. Insemnând cu x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3; z_1, z_2, z_3 respectiv măsurile arcelor: BF, FE, EC; CH, HG, GA; AD, DI, IB, să se studieze sistemul de ecuaţii la care satisfac aceste necunoscute.

O. N. Ţ.

VII. 700. Pentru ce valori ale lui p seria cu termenul general

$$u_n = \sqrt{n^{2p}+1} - \sqrt{n^{2p}-1}$$

este convergentă?

I. I. S.

VII. 701. Să se afle suma seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{n^p - (n-1)^p}{1 + n^p (n-1)^p},$$

arcele fiind cuprinse între $-\frac{\pi}{2}$ şi $\frac{\pi}{2}$:

I. I. S.

VII. 702. Să se elimine t dintre relaţiile

$$x = 1 - 2\cos 2t \quad , \quad y = \cos 3t$$

şi să se reprezinte grafic funcţia aştfel obţinută.

I. I. S.

VII. 703. Să se găsească limita expresiei:

$$E = \frac{1}{x-b} L\left(\frac{x-a}{b-a}\right) \quad , \quad (a < b)$$

când x tinde către b.

O. N. Ţ.

Clasa VIII-a. *Exerc. 612.* Să se determine parametrul λ şi să se rezolve ecuaţia:

$$x^3 - 3x + \lambda = 0$$

ştiind că rădăcinile ei satisfac relaţia:

$$nx_1 + (n+1)\,x_2 + (n+2)\,x_3 = 0.$$

I. I. S.

VIII. 613. Dacă a, b, c sunt elementele unei elipse avem identitatea:

$$(x^2+y^2-cx)^2 - a^2(x-c)^2 - b^2y^2 = (x^2+y^2-a^2)\,[(x-c)^2+y^2]$$

oricare ar fi x şi y.

N. M.

VIII. 614. Fie P (α, β) un punct situat pe parabola $y^2=2px$, cu vârful O, şi focarul F. Tangenta în P taie axa parabolei în O; fie încă D proiecţia lui P pe directoare. Să se arate că arcul OP de parabolă împarte aria paralelogramului PFQD în raportul:

$$\frac{\text{aria POF}}{\text{aria PDQO}} = \frac{2\alpha+3p}{10\alpha+3p}.$$

N. M.

VIII. 615. Cunoscând ecuaţiile:

$$Ax + By + C = 0 \quad ; \quad A'x + B'y + C' = 0$$

a două drepte (D) şi (D'), să se scrie ecuaţia simetricei uneia din aceste drepte faţă de cealaltă.

GH. B.

VIII. 616. Se dau două drepte paralele (D) şi (D') şi o a treia dreaptă (Δ) perpendiculară pe primele două. Fie M un punct mobil pe (Δ). Prin M se duc două drepte: MN care întâlneşte pe (D) în N şi MP care întâlneşte pe (D') în P.

Direcţiile dreptelor MN şi MP fiind fixe, să se arate că dreapta NP trece printr'un punct fix.

G. D. S.

VIII. 617. Tangenta într'un punct M al unei parabole taie directoarea acestei parabole în N. F fiind focarul parabolei, să se afle locul geometric al intersecției dreptei MF cu paralela dusă prin N la axa parabolei.

G. D. S.

VIII. 618. Să se discute numărul rădăcinilor reale ale ecuației:

$$(x^2 + 1)\,\text{arctg}x + (x^2 - a^2) = 0,$$

a fiind un parametru.

Să se calculeze rădăcina cu două zecimale exacte în cazul $a = 1$.

G. D. S.

VIII. 619. Să se discute prin teorema lui ROLLE natura rădăcinilor ecuației

$$2x^3 - 6a^2x + ab = 0$$

împărțind în regiuni, după natura rădăcinilor, planul (Oa, Ob).

V. GH.

Exerciții Generale. *Exerc. 528.* Dacă între întregii m și n avem relația:

$$m^2 - n^2 = 2mn + 1,$$

atunci numerele m și n sunt prime între ele.

GH. B.

E. G. 529. Să se găsească trei numere de câte trei cifre, scrise cu aceleași cifre, așa încât suma celor trei numere să fie 365.

GH. B.

E. G. 530. Știind că m este un număr prim, se cere a se găsi forma numerelor întregi x, y, z pentru a avea:

$$x + y^2 + z^3 = 3m.$$

GH. B.

E. G. 531. Să se scrie divizorii conjugaţi ai numărului:

$$N = 2^{\alpha} . 3^{\beta} .$$

I. L.

E. G. 532. Să se arate prin consideraţii de indicatori că:

$$2431^4 - 35^4 = \mathcal{M}18.$$

I. L.

E. G. 533. Să se arate că numerele de forma:

$$N = 2^{a-1} (2^a + 1)^b$$

nu pot reprezenta indicatorul unui număr dat.

I. L.

E. G. 534. Dacă $I_x (y)$ reprezintă indicatorul lui y faţă de şirul numerelor naturale până la x, atunci avem:

$$I_{100} (10) + I_{1000} (10) = 110 . \varphi (10).$$

I. L.

E. G. 535. Pentru ce valori ale lui x şi y avem:

$$\varphi (N) \leqq N - 11,$$

unde $N = a^x . b^y$, a şi b fiind factori primi, iar $\varphi (N)$ indicatorul lui N.

I. L.

E. G. 536. Să se arate, că dacă N are 3 factori primi, atunci

$$\varphi (N) > \frac{1}{4} N,$$

unde $\varphi (N)$ este indicatorul lui N.

I. L.

ERATĂ. S. G. M. Nr. 5, *pag. 99* cl. *VI. Ex. 772* în loc de $\operatorname{cotg} \frac{A}{2}$ să se pună $\operatorname{cotg} \frac{B}{2}$.

VI. 775 în loc de $= 2 (\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} 2a)$ să se pună $= 2 (\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} 3a)$.

I. I. S.

INSTRUCȚIUNI

Pentru redactarea și trimiterea soluțiunilor exercițiilor publicate în *Gazeta Matematică Supliment cu exerciții* se vor avea în vedere *Instrucțiunile* publicate în numerele 1, 2, 3 pe copertă.

Drepturile de reproducere rezervate Societății «Gazeta Matematică».

Elevii claselor VI, VII și VIII, cu bogată activitate la această revistă își pot lărgi cadrul activității rezolvând probleme din „Gazeta Matematică".

In Biblioteca Societății „Gazeta Matematică" au apărut și se găsesc următoarele:

VII. **Gh. Lazăr,** *Trigonometrie drept liniară* (după cursul predat de **Gh. Lazăr** la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu și G. Țițeica,** Vocabular Matematic . . . . . Lei 20

X. **G. Țițeica,** Culegere de Probleme de Geometrie . . . Lei 220

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. Istoric, învățăminte. Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 300 / pentru abonații G. M. și S. G. M. . . Lei 150

XII. **V. Cristescu,** Culegere de Probleme de Trigonometrie. Partea I. (Goniometrie) revăzută și adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . Lei 140

XIII. **I. Ionescu,** Culegere de Probleme de Aritmetică. Partea I. Aritmetica rațională . . . . . Lei 250

XIV. **V. Cristescu,** Culegere de Probleme de Trigonometrie. Partea I-a. (Trigonometrie plană). Ediția II-a revăzută și adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 140

XV. **A. G. Ioachimescu,** Culegere de Probleme de Algebră. Partea I. Ediția IV-a revăzută și mărită . . . . . Lei 170

XVI. **G. Țițeica,** Culegere de Probleme de Geometrie Analitică. Partea I. Ediția II-a, adăogită de *N. G. Botea* . . . . . Lei 230

XVII. **A. G. Ioachimescu,** Culegere de Probleme de Algebră. Partea II-a. Ediția IV-a, revăzută și mărită . . . . . Lei 350

XVIII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Mecanică.* Ediția II-a revăzută și adăogită de **Gabriela Țițeica** . . . . . Lei 350

XIX. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea III-a (Trigonometrie sferică). Revăzută și adăogită de G-ralul **Gh. I. Liteanu.** Lei 190

Biblioteca Istorică a GAZETEI MATEMATICE

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărțile I — VI de Geometrie plană) tradusă din limba greacă de *V. Marian* . . . . . Lei 250

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărțile VII—IX de Aritmetică și Cartea X a Iraționalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 300

III. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărțile XI—XIII de Geometrie în spațiu; Cartea XIV a lui HYPSICLE și Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 200

Biblioteca Matematică „GEORGE ȚIȚEICA"

I. **Ion Ionescu,** *Maxime și minime geometrice* . . . . . Lei 160

Suplimentul cu Exerciții. Abonamentul anual (9 numere) . . . Lei 100

„Gazeta Matematică" apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 300 lei anual, se plătește înainte și începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului și nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele și toată corespondența se trimite pe adresa:

Societății „GAZETA MATEMATICĂ"

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviței No. 158. — București 2.

(Telefon: 3-9803).

M. O., IMPRIMERIA NAȚIONALĂ. — C. 16.496

GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCIŢII

ANUL IX. No. 8 1 MAI 1943

BIBLIOTECA CENTRALĂ „ASOCIAŢIUNEA" SIBIIU

Primele 5 numere ale Suplimentului pe acest an fiind epuizate, nu putem trimite noilor abonaţi decât numerele 6, 7, 8, 9, contra costului de 80 lei.

SOCIETATEA GAZETA MATEMATICĂ
CALEA GRIVIŢEI, 158. BUCUREŞTI 2. — TELEFON 3-9803

GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCIŢII

ANUL IX. No. 8 — 1 MAI 1943

ABONAMENTUL LEI 100 PE AN (9 numere)

Soluţii şi orice corespondenţă pe adresa:

Casa «Gazeta Matematică», Calea Griviţei 158. — Bucureşti 2

EXERCIŢII REZOLVATE

Exerciţii generale. *E. G. 500. Suma inverselor puterilor de exponent* m, *a tuturor divizorilor unui număr dat, este egală cu suma puterilor de acelaşi exponent* m, *a tuturor divizorilor împărţită prin puterea a* m-*a a numărului dat.*

I. L.

Dacă divizorii lui N sunt:

$$d_1,\ d_2,\ d_3,\ldots d_{n-2},\ d_{n-1},\ d_n$$

unde avem:

$$d_1 = 1 \quad \text{şi} \quad d_n = \mathrm{N}$$

atunci avem:

$$d_1 \cdot d_n = d_2 \cdot d_{n-1} = \ldots = d_i \cdot d_{n-i+1} = \ldots = d_{n-1} \cdot d_2 = d_n \cdot d_1 = \mathrm{N}.$$

Divizorii d_i şi d_{n-i+1} se mai numesc şi *divizori conjugaţi.* Atunci trebuie să avem:

$$\sum_1^n \left(\frac{1}{d_i}\right)^m = \frac{1}{\mathrm{N}^m} \cdot \sum_1^n d_i^m.$$

Dar mai putem scrie:

$$\sum_1^n \left(\frac{\mathrm{N}}{d_i}\right)^m = \sum_1^n d_i^m.$$

Cum însă: $\dfrac{\mathrm{N}}{d_i} = d_{n-i+1}$ urmează că divizorii d_{n-i+1} din membrul întâi reproduc într'o ordine inversă divizorii d_i din membrul al doilea.

I. L.

E. G. 501. Să se arate că expresia:

$$\frac{(2.11.31)!\ 11!\ 31!}{(2.11)!\ (2.31)!\ (11.31)!\ 2^{10.30-1}.11^{30}.31^{10}}$$

este întreagă.

I. L.

Dacă admitem un număr $N = a.b.c$ unde a, b, c sunt factorii lui primi, atunci produsul numerelor prime cu N şi mai mici ca el este (vezi *G. M.*, XXXI, pag. 84):

$$\Pi(N) = \frac{(a.b.c)!\ a!\ b!\ c!}{(a.b)!\ (a.c)!\ (b.c)!\ a^{(b-1)(c-1)}.b^{(a-1)(c-1)}.c^{(a-1)(b-1)}}.$$

In cazul nostru avem:

$$a = 2\ ,\quad b = 11\quad \text{şi}\quad c = 31.$$

Adică:

$$\Pi(N) = \frac{(2.11.31)!\,2!\,11!\,31!}{(2.11)!(2.31)!(11.31)!\,2^{(11-1)(31-1)}.11^{(2-1)(31-1)}.31^{(2-1)(11-1)}}$$

$$= \frac{(2.11.31)!\,11!\,31!}{(2.11)!(2.31)!(11.31)!\,2^{10.30-1}.11^{30}.31^{10}}$$

= întreg.

I. L.

E. G. 502. Numărul divizorilor unei puteri este prim cu exponentul puterii.

I. L.

Fie $N = a^{\alpha}.b^{\beta}.c^{\gamma}\ldots$, atunci:

$$n(N^m) = (m.\alpha+1)(m.\beta+1)(m.\gamma+1)\ldots.$$

Or, toate numerele din produs sunt prime cu m.

I. L.

E. G. 503. Să se arate că, produsul numerelor prime cu N *şi mai mici ca el, pentru* $N = a^3 . b$, *este mai mic decât:*

$$(N-1)!/N^3.$$

I. L.

Ştim din G. M., XXXI—83 că:

$$\Pi(N) = \frac{N!\left(\frac{N}{ab}\right)!}{\left(\frac{N}{a}\right)!\left(\frac{N}{b}\right)! a^{\frac{\varphi(N)}{a-1}} . b^{\frac{\varphi(N)}{b-1}}}$$

$$= \frac{N!\, a^2!}{(a^2 . b)!\, a^3!\, a^{a^2(b-1)} . b^{a^2(a-1)}} .$$

Apoi:

$$\frac{(N-1)!}{N^3} = \frac{N!}{N^4} .$$

Rămâne deci să arătăm că:

$$\frac{a^2!}{(a^2 . b)!\, a^3!\, a^{a^2(b-1)} . b^{a^2(a-1)}} < \frac{1}{a^{12} . b^4} .$$

Dar se observă lesne că:

— Pentru $a = 2$ şi $b > 3$ sau $a > 2$ şi $b > a$ avem:

$$a^2(b-1) > 12 \quad \text{şi} \quad a^2(a-1) > 4.$$

Adică exponenţii lui a şi b din numitorul fracţiei întâia sunt mai mari decât exponenţii din fracţia a doua.

De asemenea avem:

$$a^2! < (a^2 . b)!\, a^3! .$$

— Pentru $a = 2$ şi $b = 3$, avem:

$$\frac{4!}{12!\, 8!\, 2^8 . 3^4} = \frac{1}{12!\, 5 . 7 . 2^{12} . 3^5} < \frac{1}{2^{12} . 3^4} .$$

I. L.

E. G. 504. Să se arate că, dacă $P_x(y)$ *reprezintă produsul numerelor prime cu* y *din şirul numerelor naturale până la* x, *atunci avem:*

$$P_{2A}(N) > 2P_A(N).$$

I. L.

Fie:

$$p_1, p_2, \ldots p_\alpha, p_{\alpha+1}, \ldots p_a$$

numerele prime cu N din şirul primelor A numere până la p_α şi din şirul primelor 2A numere până la p_a. Aceste numere sunt aşezate în ordinea mărimii, ele fiind din ce în ce mai mari.

Dacă $I_x(y)$ reprezintă numărul numerelor prime cu y din şirul numerelor naturale până la x, atunci avem:

$$\alpha = I_A(N) \quad \text{şi} \quad a = I_{2A}(N)$$

$$I_{A+B}(N) \geqslant I_A(N) + I_B(N).$$

Prin urmare:

$$a \geqslant 2\alpha.$$

Atunci vom avea

$$2 . \underbrace{p_1 . p_2 \ldots p_\alpha}_{P_A(N)} < \underbrace{p_1 . p_2 \ldots p_\alpha . p_{\alpha+1} \ldots p_a}_{P_{2A}(N)}.$$

Sau:

$$2 < P_{\alpha+1} \ldots P_a$$

ceeace este evident deoarece $P_{\alpha+1} > 2$ şi $a \geqslant 2\alpha$ unde $\alpha > 1$.

I. L.

E. G. 506. Ştiind că $\varphi(n)$ *este indicatorul lui* n, *atunci avem:*

$$\varphi[a^{\varphi(n)} - 1] = M\varphi(n).$$

I. L.

După teorema lui EULER avem:

$$a^{\varphi(n)} - 1 = k . n.$$

Dacă n este prim cu k atunci:

$$\varphi(k \,.\, n) = \varphi(k) \,.\, \varphi(n).$$

Dacă n nu este prim cu k atunci admitem că:

$$n = a_n^{\alpha_n} \,.\, b_n^{\beta_n} \ldots i_n^{\varepsilon_n} \ldots l_n^{\lambda_n}$$

$$k = a_k^{\alpha_k} \,.\, b_k^{\beta_k} \ldots i_k^{\varepsilon_k} \ldots l_k^{\lambda_k}$$

unde o parte din factori sunt comuni, şi vom presupune $_n = i_k$ Atunci:

$$\varphi(k \,.\, n) = \frac{\varphi(n)}{i_n^{\varepsilon_n - 1} \,.\, (i_n - 1)} \cdot \frac{\varphi(k)}{i_k^{\varepsilon_k - 1} \,.\, (i_k - 1)} \times i_n^{\varepsilon_n + \varepsilon_k - 1} \,.\, (i_n - 1) =$$

$$= \frac{\varphi(n) \,.\, \varphi(k) \,.\, i_n}{i_n - 1} = \mathrm{M}\,\varphi(n).$$

I. L.

E. G. 507. Dacă p *este un număr prim absolut, iar* a *un număr oarecare nedivizibil cu* p, *atunci :*

$$\varphi[a^{p-1} - 1] = \mathrm{M}(p - 1)$$

unde $\varphi(i)$ *este indicatorul lui* i.

I. L.

După teorema lui FERMAT avem:

$$a^{p-1} - 1 = k \,.\, p \,.$$

Dacă p este prim cu k, atunci

$$\varphi(k \,.\, p) = \varphi(k) \,.\, \varphi(p - 1) = (p - 1) \,.\, \varphi(k),$$

Dacă k are printre factorii lui şi pe p^{ε}, atunci:

$$\varphi(k \,.\, p) = p^{\varepsilon - 1} \,.\, (p - 1) \,.\, \varphi\left(\frac{k}{p^{\varepsilon}}\right) = \mathrm{M}(p - 1).$$

I. L.

Până la 1 Aprilie 1943 s'au primit soluții bune (la exercițiile propuse în numerele 4, 5, 6, 7 ale anului al IX-lea)(*) dela:

Liceul de fete „Elena Ghiba Birta", Arad.

Clasa VI-a: Petru V. Doina (VI: 764); Postolache Nina (VI: 764).
Clasa VIII-a: Păunescu Gh. Liliana (VIII: 589, 90, 8).

Liceul „Moise Nicoară", Arad.

Clasa VII-a: Șiclovan S. Lucian (VII: 684; 95).

Liceul „Regele Ferdinand I", Bacău.

Clasa VII-a: Fânaru N. Dumitru (VII: 694).

Liceul „Gh. Codreanu" Bârlad.

Clasa VI-a: Manoliu Sp. Mihai (VI: 766, 72*, 3, 7*, 9*).

Liceul „Samuil Vulcan", Beiuș.

Clasa VI-a: Ardelean V. Aurel (VI: 764, 77*); Goldiș T. Gheorghe (VI: 764, 5, 77; E. G.: 502, 12, 3, 8); Hodișan Gh. Florian (VI: 764, 5, 73*, 7*); Logofătu M. Tănase (VI; 765, 73, 7, 9*); Malita A. Mircea (VI: 764, 5, 73*, 7*, 9*; VII: 683); Sasu I. I. (E. G.: 502, 7, 12, 3).

Liceul „Avram Iancu", Brad.

Clasa VI-a: Birănaș T. Ioan (VI: 777, 9*).

Liceul „N. Bălcescu", Brăila.

Clasa VI-a: Avram Gh. Cristache (VI: 777, 79); Constantinescu N. Ilie (VI: 775*, 7, 8, 9, 80); Boerescu Cezar (E. G.: 502, 6, 7, 13, 7).
Clasa VII-a: Gafițeanu M. Alexandru (VII: 685, 6, 92*, 4*, 5).

Liceul „Dr. Ioan Meșotă", Brașov.

Clasa VI-a: Alexandrescu M. Mircea (VI: 777*); Picalschi E. Ovidiu (VI: 777).

Liceul de fete „Iulia Hasdeu", București.

Clasa III-a: Barbu Ana (III: 223, 5*).

---

*) Numărul unui exercițiu foarte bine rezolvat și îngrijit redijat este însoțit de semnul *.

Liceul de fete „Aurel Vlaicu", Bucureşti.

Clasa VII-a: MĂNESCU GH. MARGARETA (VII: 681, 2, 4*).

Liceul „Aurel Vlaicu", Bucureşti.

Clasa V-a: LEON AL. MIHAIL (V: 765*, 6*, 7, 9; E. G.: 507); BOBOIANU M. (E. G.: 495).

Clasa VI-a: MARINESCU E. EMIL (VI: 764, 5, 71, 3*, 7*; VII: 669, 81); RADU M. CONSTANTIN (VI: 777).

Liceul „Matei Basarab", Bucureşti.

Clasa VI-a: IEŞAN ŞT. ALEXANDRU (VI: 777, 8, 9, 80); E. G.: 502, 6, 7, 12, 13, 16); MUNTZ M. EDUARD (VI: 777*, 8, 9*; VII: 694).

Clasa VII-a: ANTONESCU D. EUGEN (VII: 677, 81, 2, 8, 94); POPESCU N. ŞTEFAN (VII: 677, 81, 8, 94*).

Liceul „Cantemir Vodă", Bucureşti.

Clasa VI-a: DIACONESCU GRIGORE (VI: 764, 6, 73, 5*, 7).

Liceul „Spiru Haret", Bucureşti.

Clasa VII-a: LAZĂR LUCA (VII: 680, 90*, 1*, 5).

Liceul „Gheorghe Lazăr", Bucureşti.

Clasa VII-a: TIMOTIN AL. ALEXANDRU (VII: 676, 9, 81, 2, 3, 8, 94*; E. G.: 495, 7, 9, 504, 18).

Liceul „Titu Maiorescu", Bucureşti.

Clasa IV-a: SENI DINU (IV: 645, 53, 6, 8; V: 772, 7, 8; E. G.: 518).

Clasa VI-a: CANTUNIAR CRISTU (VI: 764, 8, 77*); CODREANU NESTOR (VI: 764, 5, 77, 9*); DOBRESCU AL. CONSTANTIN (VI: 777); GHIAŢĂ VLADIMIR (VI: 765); MATEESCU ARGHIR (VI: 764, 5, 77, 9*); MUSTĂCESCU V. TRAIAN (VI: 764, 5); PĂUNESCU C. VICTOR (VI: 765, 7); ULUIERU C. MIHAIL (VI: 765, 79*).

Clasa VIII-a: BURGHIU D. IOAN (VIII: 589, 602, 5*); PELEANU IOAN (VIII: 605, 8); RADU NARCIS (VIII: 597*); SCHEAUCU V. NICOLAE (VIII: 605*, 7*, 10, 13*); SLĂVESCU V. MIRCEA (VIII: 588, 9, 90, 96, 601).

Colegiul Naţional „Sf. Sava", Bucureşti.

Clasa V-a: SĂVESCU A. MIRCEA (V: 766*, 71*).

Clasa VI-a: BĂRDĂUNE D. NICOLAE (VI: 771, 7*; E. G.: 495); SOARE V. MIRCEA (VI; 765, 71*, 7, 9*, 81).

Clasa VII-a: HORBUNIEV P. VASILE (VII: 681); MIŞICU MIRCEA (VII: 680, 2, 4, 6, 9, 94).

Liceul „Gheorghe Şincai", Bucureşti.

Clasa VI-a: Dăniilescu C. Constantin (VI: 764, 5, 7, 8, 9).
Clasa VII-a: Ene Al. Ioan (677, 80, 5).

Liceul „Barbu Delavrancea", Bucureşti.

Clasa VII-a: Ghicon Gh. Ovidiu (VII: 685, 6, 94*; VIII: 597, 610; E. G.: 495, 507, 13, 5).

Liceul „Sf. Iosif" Bucureşti.

Clasa III-a: Popovici I. V. (E. G.: 505).

Liceul „Profesorii Asociaţi" Bucureşti.

Clasa VII-a: Maistros N. Ianachi (VII: 676, 80).

Liceul Internat, Buftea.

Clasa V-a: Zanelli Nicolae (V: 765, 76).
Clasa VI-a: Roşu S. Andrei (VI: 777, 9).

Liceul „B. P. Haşdeu", Buzău.

Clasa VII-a: Ionescu V. Ovidiu (VII: 683, 5); Popescu I. Chiril (VII: 677, 82).

Liceul „Ştirbey Vodă", Călăraşi-Ialomiţa.

Clasa VIII-a: Dima N. Ştefan (VIII: 590, 8, 605*, 7*); Ionescu C. Victor (VIII: 589, 90, 8, 605*, 6*, 7*, 16*, 7*).

Liceul „Ioniţă Assan", Caracal.

Clasa VI-a: Grigore A. Gheorghe (VI: 764, 73, 80, 1).
Clasa VII-a: Marinescu Gh. Ion (VII: 685).

Liceul „Aron Pumnul", Cernăuţi.

Clasa IV-a: Ţurcan D. Ion (IV: 647, 50).

Liceul „Mitropolitul Silivestru", Cernăuţi.

Clasa VIII-a: Senic L. Anatolie (VIII: 596, 601).

Liceul Militar Cernăuți.

Clasa IV-a: Lupescu Gh. (IV: 652, 3); Manoliu Dorin (IV: 652, 3); Tănase I. Paul (IV: 652, 3).

Liceul „Mircea cel Bătrân", Constanța.

Clasa VI-a: Lateș G. Mircea (VI: 770, 1).
Clasa VII-a: Gherghic N. Gheorghe (VII: 685, 6*, 87, 92*, 4*, 5).

Liceul de fete „Elena Cuza", Craiova.

Clasa III-a: Georgescu C. Gabriela (III: 219).
Clasa V-a: Grămescu R. Zenoria (V: 771: 6*); Jienescu I. Marilena (V: 771, 6*).
Clasa VII-a: Ștefănescu G. Eftimia (VII: 685).

Liceul Militar „D. A. Sturdza", Craiova.

Clasa VI-a: Cârstea D. M. (VI: 764, 5, 72); Popa A. Nicolae (VI: 764, 5, 72).

Liceul „Oltea Doamna", Iași.

Clasa V-a: Albu D. Aurelia (V: 770, 1*, 8*).

Liceul de Aplicație, Iași.

Clasa V-a: Todirescu N. Alexandru (V: 770).

Liceul Militar, Iași.

Clasa III-a: Anastasiu Paul (III: 223); Anton C. Aurel (III: 223, 5, 6); Andrian Th. G. (III: 225); Asândei N. Nicolae (III: 224); Baștа Mircea (III: 223, 5, 6); Bosinceanu P. Pavel (III: 219, 24, 5, 6); Botezatu I. Ion (III: 224); Buzoianu M. Octav (III: 224); Chiriac I. Mircea (III: 224, 9); Ciobănică M. (III: 225); Ciobanu Iosif (III: 223, 4, 5, 6); Corduneanu C. (III: 224; V: 766, 77); Costache P. Benone (III: 219, 25, 6); Crivăț C. Gheorghe (III: 223, 4); Dabija D. Paul (III: 219, 23, 4, 5, 6); Dorin C. Gheorghe (III: 219, 23, 4, 6); Drăghicescu N. Constantin (III: 221, 6; V: 766); Filip V. Ioan (III: 223, 4); Foghel D. Gh. (III; 219, 25; Gura Petru (III: 219); Huideș Alexandru (III: 219, 23, 24, 26); Melinte N. Liviu (III: 219, 24, 6); Nechita I. Constantin (III: 219, 24); Panaitescu Alexandru (III: 219); Păstrăvanu G. Decebal (III: 219, 24, 5, 6); Pietrăreanu I. Aurel (III: 219); Pintilie I. Valerian (III: 223, 5, 6); Platon C. Florin (III: 223, 5); Popa P. Paul (III: 224, 5; V: 766); Rădulescu I. Iorgu (III: 219); Rădulescu Mihai (III: 224, 5); Tofan C. Aurel (III: 224, 5, 6; V: 766); Vlad N. Radu (III: 224); Zăhărescu E. Gh. (III: 223, 6).

Clasa IV-a: Bârsănescu M. Virgiliu (IV: 655); Calcan V. Victor (IV: 655, 7); Chiriac Gh. Dumitru (IV: 647, 8, 57); Ciocârlan I. Corneliu (IV: 656, 7); Diaconu Gheorghe (IV: 647, 8, 50, 5, 7); Drăgan S. N. (IV:

655, 7); Jacobeț Gh. Nicolae (IV: 648, 55, 7); Moraru Gh. Constantin (IV: 655, 6, 7); Munteanu I. S. Dan (IV: 655, 6, 7); Olaru Gh. Adrian (IV: 655, 7); Palade V. C. (IV: 655, 7): Paraschivescu C. Mircea (IV: 657); Plăpunaru Vasile (IV: 647); Stănescu P. Ioan (IV: 657); Țugulea T. Andrei, (IV: 648, 50); Țuleașcă Ioan (IV: 648, 57); Vlad Mircea (IV: 655, 6, 7).

Clasa V-a: Bălan Corneliu (V: 766, 70, 1); Bălășcuță Traian (V: 770, 1); Bârzescu Mircea (V: 770, 1, 2, 6, 7, 9; E. G.: 490, 3, 6, 509, 10, 1, 2); Chirilovici Dumitru (V: 770); Ciobanu D. Radu (V: 770, 1); Ciortoloman Stelian (V: 766, 70); Ciumașu Viorel (V: 770, 6; E. G.: 510, 1, 2); Ciureanu Gh. Constantin (V: 768, 70, 1, 2; E. G.: 509, 10, 1, 2); Dimitriu Nicolae (V: 770); Drăghicescu P. C. (V: 773); Haisuc P. Mihai (V: 770, 1); Ifrim I. Alfons (V: 766, 8, 70, 1; E. G.: 509, 10, 1; 2); Marian Călin (V: 766, 7); Nache D. Dumitru (V: 770, 1, 2, 6; E. G.: 490, 3, 509, 10, 1, 2); Netedu N. Constantin (V: 766); Popa N. Ioan (V: 770, 1); Ștefănescu Aurelian (V: 766, 70, 1, 6); Tofan C. A. (V: 773); Văideanu E. Constantin (V: 771, 6, 7, 9; E. G.: 511, 2, 5).

Clasa VI-a: Brighiu Corneliu (VI: 777, 8, 9); Edu C. Eugen (VI: 771, 2, 3); Mihăilescu I. Ștefan (VI: 771, 2, 3, 7, 8, 9*); Mircea Gh. Ignat (VI: 772, 3); Petrescu V. Dumitru (VI: 772); Roșu T. Nicolae (VI: 771, 2, 3, 7, 8, 9*); Teodorescu C. Constantin (VI: 771, 2, 3); Teodorescu Vasile (VI: 771, 3); Vintilă Gh. Constantin (VI: 771, 2, 3); Vulpe Ion (VI: 771, 2, 3); Zaharia M. R. (VI: 772, 73).

Clasa VII-a: Andarache Ioan (VII: 676, 80, 3, 6, 90*, 1*, 4*; E. G.: 499, 502, 9, 10, 2, 21, 2); Andreescu Mihail (VII: 680, 6*, 94*); Andrei Gh. Aurel (VII: 676, 80, 3, 6*, 94*); Ardeleanu Gh. (VII: 680, 6, 94); Baciu C. Dumitru (VII: 683, 86, 94; E. G.: 499, 502, 9, 10, 2); Basacopol Al. (VII: 680, 3, 6, 94; E. G.: 499, 509, 10, 2); Bosinceanu Constantin (VII; 676, 80, 3, 6, 94); Capverde I. Laurențiu (VII: 686); Chirulescu C. Daniel (VII: 686); Coroiu I. Dan (VII: 694*); Ionescu D. Virgiliu (VII: 680); Opran I. Mircea (VII: 680, 3, 6, 94*); Palade Tudorache (VII: 680, 3, 6); Petrache Ioan (VII: 676, 86); Petrican I. Mihai (VII: 680, 6, 94*); Popa Nicolae (VII: 680, 6, 94); Popa D. Petre (VII: 694); Rădulescu Mircea (VII: 694*; E. G.: 499, 502, 9, 10, 2, 5); Simion D. Adrian (VII: 680, 3, 94); Țicăloiu D. Octavian (VII: 671, 80, 3, 94*); Turculeț D. Tiberiu (VII: 683, 94*); Văideanu M. G. (VII: 675, 80, 3, 6, 94); Vasiliu G. Dumitru (VII: 683, 5*; VIII: 597: E. G.: 499, 502, 5, 6, 7, 9, 10, 1, 2, 3, 5, 7); Zaharia M. Mihai (VII: 676, 80, 3, 6, 94; E. G.: 499, 502, 9, 10, 2, 5).

Clasa VIII-a: Căruntu D. Florin (VIII: 591, 6, 7, 8, 601*, 7*); Marinescu M. Ioan (VIII: 589, 96, 7, 8, 600*, 1, 7*, 10); Milea C. Constantin (VIII: 597, 8); Puchiu T. Gheorghe (VIII: 596, 7, 8, 601, 7*).

Liceul „I. C. Brătianu" Pitești.

Clasa VI-a: Bălteanu R. Radu (VI: 773, 80); Constantinescu N. Constantin (VI: 779, 80, 1); Zamfirescu C. Mihai (VI: 779*).

Clasa VII-a: Retevoescu Gh. (VII: 680, 6).

Liceul de fete „Despina Doamna", Ploești.

Clasa VII-a: Georgescu A. Maria (VII: 677*, 8, 82).

Liceul „Sf. Petru și Pavel", Ploești.

Clasa V-a: Constantinescu R. Mihai (V: 768*, 70*, 1*, 6*, 8*; VI: 764, 5, 7, 9; VII: 671, 83; VIII: 597, 610; E. G.: 495, 507, 13, 5, 21).

Clasa VI-a: Buzatu D. Corneliu (VI: 773).

Clasa VIII-a: Baumann O. Eduard (VIII: 596, 601).

Colegiul Național „N. Filipescu", Predeal.

Clasa VI-a: Columbeanu D. Petre (VI: 764, 5, 8, 73, 4, 5, 7, 8; E. G.: 495, 7, 505, 9, 10, 2, 5, 6, 7, 8, 21); Ghiță M. Vasile (IV: 764, 5, 8, 73, 3, 5*, 7; VII: 669, 79); Marinescu C. Marinel (VI: 764, 5, 8, 72, 3, 5, 7); Pojogeanu I. Mircea (VI: 777).

Clasa VII-a: Balaban Șt. S. (E. G.: 506, 7, 13, 5); Georgescu N. S. (E. G.: 506, 7, 13, 5); Greculescu T. (E. G.: 506, 13, 5); Iliescu C. C. (VII: 676, 80, 3, 5, 6, 96, 703; E. G.: 499, 502, 6, 7, 10, 2, 3, 21); Ionescu C. V. (E. G.: 506, 7, 13, 5); Parotă I. P. (E. G.: 506, 7, 13, 5); Postelnicu M. (E. G.: 506, 7); Raican R. A. (E. G.: 506, 7, 13, 5); Turtoescu L. (E. G.: 506, 13).

Liceul „Eudoxiu Hurmuzachi", Rădăuți.

Clasa VII-a: Bocancea E. Octavian (VII: 676, 80, 1); Trufin Gh. Octavian (VII: 680).

Gimnaziul „Principele Nicolae", Sinaia.

Clasa III-a: Bumbăcaru Gheorghe (III: 222).

Clasa IV-a: Bontea G. Ana (IV: 647, 8); Enoiu Roman (IV: 647); Kiss Eugen (IV: 647, 8).

Liceul „Tudor Vladimirescu", Târgu-Jiu.

Clasa V-a: Ghiță G. Ivan (V: 765*, 70, 1; VI: 764, 5, 73).

Clasa VII-a: Gâță G. Gheorghe (VII: 676, 7, 80, 1, 3, 5, 6, 94); Giurconiu Gh. Mihail (VII: 680, 6; E. G.: 518).

Liceul „C. Diaconovici Loga", Timișoara.

Clasa V-a: Mărcuțiu P. Silviu (V: 765, 7, 70, 6; VI: 764, 5, 77).

Clasa VI-a: Mugurel I. Jula (VI: 764); Sârbu I. Iancu (VI: 764, 5, 7); Șerengău Mihai (VI: 777).

Liceul Militar „Mihai Viteazul", Timişoara.

Clasa IV-a: Chiran Paul (IV: 647, 8, 50, 5*); Florian Paul (IV: 655); Odha Ioan (IV: 650); Stanciu V. Petre (IV: 647, 8, 50, 5); Tripşa Iosif (IV: 647, 50, 1; V: 767; E. G.: 505).

Clasa V-a: Cochela I. Livius (V: 768*, 76, 7, 8, 9); Filimon F. Ioan (V: 774, 8, 9); Gogulescu A. Petre (V: 777, 8, 9); Iordănescu Virgil (V: 775, 6, 7, 8, 9); Rogoz V. Ioan (V: 772, 3, 7, 8, 9); Strejea Iorgu (V: 768*, 71); Teodorescu A. Alexandru (V: 771); Vrânceanu Gheorghe (V: 775, 6, 7, 8; VI: 777, 9; VIII: 597; E. G.: 513).

Clasa VI-a: Bacicu D. Virgil (VI: 765, 77); Cârstoiu G. Nicolae (VI: 765, 75, 7, 8); Milea N. Nicolae (VI: 777); Oprea D. Nifon (VI: 777, 8, 9); Pavica A. Victor (VI: 777, 8, 9); Pomoje G. Romulus (VI: 777, 8, 9); Popescu I. Barbu (VI: 777, 9); Radu Augustin (VI: 777, 8, 9); Şerengău Mihai (VI: 760, 4, 5, 75); Sorop I. Petre (VI: 778, 9); Ţecu P. Traian (VI: 764, 5, 73, 7, 9); Valter Constantin (VI: 777, 8, 9).

Clasa VII-a: Păläceanu D. Vasile (VII: 683, 6, 95; E. G.: 499, 518); Pârvan D. Ioan (VII: 676, 80, 3, 90, 1, 4, 5); Stancu M. Ioan (VII: 695; E. G.: 499).

Clasa VIII-a: Călugăru H. Ilarion (VIII: 610); Oprea D. Gheorghe (VIII: 608, 10); Pântea P. Tudor (E. G.: 493); Vitănescu Costin (VIII: 610).

Liceul „Regele Ferdinand I", Turda.

Clasa VII-a: Ighian I. Minea (VII: 677*, 80, 2).

Liceul „Traian", Turnu-Severin.

Clasa V-a: Aldescu T. Marius (V: 776); Muscalu Gr. Alexandru (V: 770, 6, 7); Nicolicioiu L. Ion (V: 770, 6, 7); Pârşan C. Mihail (V: 770).

Clasa VI-a: Boldea C. Constantin (VI: 777, 9); Cleanoveanu N. Alexandru (VI: 764, 6); Deatcu I. Daniel (VI: 777); Pletea C. Statie (VI: 764, 71, 7).

Clasa VII-a: Dumitrescu Gh. Traian (VII: 676, 80*, 6); Ionescu Liviu (E. G.: 493).

Clasa VIII-a: Alexandrescu I. Victor (VIII: 589, 90, 4, 6, 8, 601*, 10); Caramalău V. Eugen (VIII: 589, 91, 4, 6, 8, 9*, 600*); Ceciu Mihai (VIII: 596, 601).

Elevi particulari.

Clasa VI-a: Barbu A. Ioan (VI: 777); Pitiş L. Nicolae (VI: 771, 6, 7; VII: 685, 95; VIII; 598; E. G.: 507, 11, 5, 7, 20, 1, 2).

Clasa VII-a: Burileanu O. Sanda (VII: 683, 4, 6*).

Clasa VIII-a: Ionescu F. Petre (E. G.: 485, 96, 507, 10, 3, 5, 8, 20, 1).

EXERCIŢII PROPUSE

Soluţiile exerciţiilor propuse în acest număr se primesc până la 1 August 1943

Clasa III-a. *Exerc. 231.* Intr'un patrulater, bisectoarele a două unghiuri opuse sunt paralele. Ce legătură există între celelalte două unghiuri opuse?

G. D. S.

III. 232. Fiind dat dreptunghiul ABCD, prelungim latura $\overline{AD}$ cu segmentul $\overline{DE} = \frac{1}{3}\overline{AD}$. Fie F şi G punctele unde dreapta EB taie respectiv latura DC şi diagonala AC.

Să se calculeze aria triunghiului CGF, exprimând-o în raport cu aria S a dreptunghiului dat.

Aceeaşi problemă, când $\overline{DE}$ este luat egal cu $\overline{AB}$.

O. N. Ţ.

III. 233. Intr'un cerc O, cu raza R, este dat triunghiul echilateral înscris MNP. Să se înscrie în cercul O dreptunghiul ABCD având diagonalele AC şi BD respectiv paralele cu laturile MP şi MN.

1°. Să se calculeze *raportul ariilor* triunghiului MNP şi dreptunghiului ABCD.

2°. Să se exprime *aria* poligonului MANBCPDM în raport cu aria patratului construit pe raza cercului O.

O. N. Ţ.

Clasa IV-a. *Exerc. 663.* Intr'o piramidă dată să se construiască, de o parte şi de alta a bazei, două secţii paralele cu baza aşezate la o distanţă dată *d* una de alta şi astfel ca diferenţa ariilor lor să fie egală cu aria bazei.

O. N. Ţ.

IV. 664. Fiind date h, b şi B măsurile înălţimii, ariei bazei mici şi ariei bazei mari ale unui trunchiu de piramidă cu bazele paralele ABCDEF împărţim muchea laterală $\overline{AD}$ în trei părţi egale: $\overline{AA'} = \overline{A'D'} = \overline{D'D}$ şi prin A', D' ducem secţiile A'B'C', D'E'F' paralele cu bazele trunchiului de piramidă.

Să se calculeze raportul volumelor trunchiului de piramidă A'B'C'D'E'F' şi ABCDEF.

O. N. Ţ.

IV. 665. Se dă un paralelipiped oarecare ABCDA'B'C'D'. Pe muchea AA' luăm punctul M astfel ca $\frac{AM}{MA'} = k$, iar prin punctul M ducem un plan (P) paralel cu planul diagonal AB'C'D; el determină cu feţele paralelipipedului trei prisme triunghiulare.

Să se calculeze volumele lor în raport cu volumul paralelipipedului dat.

O. N. Ţ.

IV. 666. Se dă o prismă dreaptă ABCD A'B'C'D' cu baza un trapez dreptunghiu ABCD ($AD \parallel BC$; $AB \perp BC$). Prin muchea BB' să se ducă un plan, care să împartă prisma dată în două volume al căror raport dat să fie k.

Cazuri particulare $k = \frac{1}{2}$; $k = \frac{1}{4}$. Discuţie.

O. N. Ţ.

Clasa V-a. *Exerc. 785.* Să se construiască un triunghiu ABC cunoscând vârful A, mijlocul A' şi direcţia laturii BC, precum şi media geometrică m a laturilor $\overline{AB}$, $\overline{AC}$.

D. S.

V. 786. Se consideră toate trapezele ABCD care au unghiurile din A şi B drepte, iar diagonala AC constantă şi perpendiculară pe diagonala BD. Să se arate, că produsul $\overline{AD} \cdot \overline{BC}$ este constant.

Gh. B.

V. 787. Considerăm două semidrepte perpendiculare OX, OY şi I un punct pe OX. Ducem cercul (I) cu centrul I, care trece prin O; perpendiculara în I pe OX taie cercul (I) în J; cercul, cu centrul O, care trece prin J taie pe OX, OY în U, V. Fie încă $\overline{UM} = \overline{VN} = OI$, M şi N fiind luate pe OX şi OY. Să se arate că MN este tangentă cercului (I).

N. M.

V. 788. Să se rezolve ecuaţia:

$$24x^5 + 14x^4 - 87x^3 - 87x^2 + 14x + 24 = 0$$

N. M.

V. 789. Să se rezolve ecuaţia:

$$\frac{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}{(3a^2+b^2)(a^2+3b^2)} = \frac{(x^2+1)^2}{4(a^2+b^2)^2}.$$

I. I. S.

Clasa VI-a. *Exerc. 788.* Fie:

$$P(x) \equiv x^4 - 10x^3 + 31x^2 - 34x + 12.$$

Să se arate că:

$$P(3+\sqrt{3}) + P(3-\sqrt{3}) + 12 = 0.$$

N. M.

VI. 789. Să se verifice identitatea:

$$\frac{\sin 2x + \sin 6x + \sin 8x}{\sin 2x - \sin 6x + \sin 8x} = \frac{\operatorname{tg} 4x}{\operatorname{tg} x}.$$

N. M.

VI. 790. Să se verifice relaţia:

$$\frac{(\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b)\sin(a+b)}{\cos a \cos b} = \left[\frac{\sin(a+b) + \operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 + \cos a \cos b}\right]^2.$$

I. I. S.

VI. 791. Să se verifice identitatea:

$$\frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}} = 2\cos x - \sec x.$$

N. M.

VI. 792. Să se stabilească egalitatea:

$(ah_a + bh_b + ch_c)\,(abh_a h_b + bch_b h_c + cah_c h_a) = 9abch_a h_b h_c$,

notaţiile fiind cele obişnuite într'un triunghiu oarecare.

I. I. S.

VI. 793. Între elementele unui triunghiu avem relaţia:

$$\frac{a\sin(B+\alpha) - b\sin(A-\alpha)}{a\cos(B+\alpha) + b\cos(A-\alpha)} = \operatorname{tg}\alpha$$

oricare ar fi α.

N. M.

Clasa VII-a. *Exerc. 704.* Să se discute sistemul:

$$x + \lambda y = 5\ ,\quad \lambda x - y + 3z = \mu\ ,\quad 2\lambda x - 7y + 9z = -10.$$

Caz particular: $\lambda = -2,\ \mu = -\frac{20}{3}$.

N. M.

VII. 705. Să se arate că:

$$\begin{vmatrix} 1 & \sin x & \cos x \\ \cos x & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \sin x \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -1 & \sin x & \cos x \\ \cos x & 0 & -1 \\ 0 & -1 & \sin x \end{vmatrix} = \sin^6 x.$$

N. M.

VII. 706. Să se deriveze funcţiile:

$$y = \operatorname{arctg}\frac{2\cos\alpha + x\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha - 2x\cos\alpha}\ ;\quad y = \operatorname{arctg}\frac{2\cos x + \alpha\sin^2 x}{\sin^2 x - 2\alpha\cos x}.$$

N. M.

VII. 707. Se consideră funcţia $y = f(x)$ definită de egalitatea:

$$\begin{vmatrix} \sin x & \cos x & e^x \\ \cos x & -\sin x & e^x \\ \cos\alpha & \sin\alpha & y \end{vmatrix} = 0.$$

Să se arate, că:

$$y' = 2e^x \cos(x + \alpha).$$

N. M.

VII. 708. Fie

$$f(x, y) \equiv x^3 + 3xy + y^3.$$

Să se arate, că:

$$\frac{1}{27}[f''_{xx} \cdot (f'_y)^2 + f''_{yy} \cdot (f'_x)^2 - 2f''_{xy} f'_x f'_y] = 2xy[f(x, y) - 1] =$$

$$= (x^2 + y^2)^3 \cdot y'' = 2(x + y^2)^2 \cdot (x + y' + yy'^2),$$

y', y'' fiind derivatele lui y în raport cu x deduse din $f(x, y) = 0$.

N. M.

VII. 709. Să se studize variaţia funcţiei:

$$y = \frac{x - a}{x - b} e^{\frac{x-b}{x-a}} \qquad a < b)$$

şi să se reprezinte.

O. N. Ţ.

VII. 710. Să se studieze şi să se reprezinte variaţia funcţiei:

$$y = \left(\frac{x - a}{x - b}\right)^2 \cdot e^{\frac{a-x}{x-b}} \qquad (a < b).$$

O. N. Ţ.

Clasa VIII-a. *Exerc. 620.* Se dau două drepte paralele (Δ), (Δ') şi un punct fix A pe (Δ'). Un unghiu drept cu vârful în A se roteşte în jurul acestui punct şi taie dreapta (Δ) în M şi N.

Să se arate că cercurile cu centrele pe dreapta (Δ) şi trecând prin M şi N, au două puncte comune.

Se cere şi soluţia prin geometria elementară.

D. S.

VIII. 621. Se dă triunghiul ABC înscris în cercul cu centrul O şi circumscris cercului cu centrul I. Se raportează figura la un sistem de axe dreptunghiulare cu origina în O, una din axe fiind paralelă cu BC. Ştiind că (α, β) sunt coordonatele lui I, să se determine coordonatele lui A.

GH. B.

VIII. 622. Fie M un punct în planul parabolei (p) cu focarul F; MF taie tangenta la vârf în N. Paralela din N la axă taie polara lui M în P. Să se arate, că, dacă M descrie o paralelă la OY, P descrie o parabolă.

N. M.

VIII. 623. Prin punctul M din planul unei parabole (p), ducem o secantă variabilă, care taie parabola în N_1, N_2.

Să se arate că *locul* mijlocului P al segmentului N_1N_2 este o parabolă (p') cu axa paralelă cu a parabolei (p) şi care trece prin M şi prin proiecţia lui M pe axă.

N. M.

VIII. 624. Să se afle locul vârfurilor parabolelor din problema precedentă, când M descrie o dreaptă oarecare.

N. M.

VIII. 625. Să se rezolve ecuaţia:

$$x^5 - 4x^4 - 20x^3 + 106x^2 + \alpha x + \beta = 0,$$

unde α şi β au valori raţionale, ştiind că ecuaţia are o rădăcină $2 + \sqrt{5}$ şi între rădăcinile raţionale avem relaţia:

$$x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 0.$$

N. M.

VIII. 626. Să se determine m aşa că ecuaţia:

$$16x^4 - 40x^3 + mx - 7 = 0$$

să aibă o rădăcină dublă.

I. I. I.

VIII. 627. Să se calculeze valoarea expresiei:

$$E \equiv \frac{a^5}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^5}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^5}{(c-a)(c-b)}$$

în funcţie de coeficienţii ecuaţiei:

$$x^3 + px + q = 0,$$

care are rădăcinile a, b, c.

I. I. S.

Exerciţii Generale. *Exerc. 537.* Să se găsească patratul de patru cifre $abcd$ ştiind că a, b, d sunt în progresie geometrică, iar b, c, d în progresie aritmetică.

GH. B.

E. G. 538. Să se arate că expresia:

$$E \equiv 27 \cdot 8^{2n+1} \cdot 3^{6n} + 25 \cdot 5^{8n+2}$$

este divizibilă cu 841, oricare ar fi numărul întreg şi pozitiv n.

I. I. S.

E. G. 539. Există perechi de numere prime consecutive a căror sumă să fie: 10, 100, 1000 sau 10 000?

I. L.

E. G. 540. Există perechi de patrate perfecte consecutive a căror sumă să fie: 10, 100, 1000, 10000 sau 100 000?

I. L.

E. G. 541. Există perechi de cuburi perfecte consecutive a căror sumă să fie: 10, 100, 1000, 10 000, 100 000 sau 1 000 000?

I. L.

E. G. 542. Să se arate, că avem:

$$2(n-1) \leqq \sum_{1}^{n} \varphi(i) \leqq \frac{n(n-1)}{2},$$

$\varphi(i)$ fiind indicatorul lui i, iar $n \geqq 5$.

I. L.

E. G. 543. Să se calculeze suma numerelor prime cu 100 şi subordonate lui 30 şi 70 din şirul natural al numerelor dela 30 la 70.

I. L.

E. G. 544. Dacă $\varphi_i(N)$ reprezintă indicatorul de ordinul i a lui N şi dacă $\varphi_n(N) = 1$, atunci pentru $N = 2^{2\alpha} \cdot 3^{\alpha}$ avem $n = 3\alpha$.

I. L.

E. G. 545. Dacă $\pi(n)$ reprezintă produsul numerelor prime cu n şi mai mici decât el, atunci avem de multe ori:

$$\pi(n) - 1 = \mathcal{M}n.$$

I. L.

INSTRUCȚIUNI

Pentru redactarea și trimiterea soluțiunilor exercițiilor publicate în *Gazeta Matematică Supliment cu exerciții* se vor avea în vedere *Instrucțiunile* publicate în numerele 1, 2, 3 pe copertă.

Drepturile de reproducere rezervate Societății «Gazeta Matematică».

Elevii claselor VI, VII și VIII, cu bogată activitate la această revistă își pot lărgi cadrul activității rezolvând probleme din „Gazeta Matematică".

In Biblioteca Societății „Gazeta Matematică" au apărut și se găsesc următoarele:

VII. **Gh. Lazăr,** *Trigonometrie drept liniară* (după cursul predat de **Gh. Lazăr** la colegiul Sf. Sava). . . . . Lei 10

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu și G. Țițeica,** Vocabular Matematic . . . . . Lei 20

X. **G. Țițeica,** Culegere de Probleme de Geometrie . . Lei 220

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. Istoric, învățăminte. Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 300 / pentru abonații G. M. și S. G. M. . . Lei 150

XII. **V. Cristescu,** Culegere de Probleme de Trigonometrie. Partea I. (Goniometrie) revăzută și adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . Lei 140

XIII. **I. Ionescu,** Culegere de Probleme de Aritmetică. Partea I. Aritmetica rațională . . . . . Lei 250

XIV. **V. Cristescu,** Culegere de Probleme de Trigonometrie. Partea I-a. (Trigonometrie plană). Ediția II-a revăzută și adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 140

XV. **A. G. Ioachimescu,** Culegere de Probleme de Algebră. Partea I. Ediția IV-a revăzută și mărită . . . . . Lei 170

XVI. **G. Țițeica,** Culegere de Probleme de Geometrie Analitică. Partea I. Ediția II-a, adăogită de *N. G. Botea* . . . . . Lei 230

XVII. **A. G. Ioachimescu,** Culegere de Probleme de Algebră. Partea II-a. Ediția IV-a, revăzută și mărită . . . . . Lei 350

XVIII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Mecanică.* Ediția II-a revăzută și adăogită de **Gabriela Țițeica** . . . . . Lei 350

XIX. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea III-a (Trigonometrie sferică). Revăzută și adăogită de G-ralul **Gh. I. Liteanu.** Lei 190

Biblioteca Istorică a GAZETEI MATEMATICE

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărțile I — VI de Geometrie plană) tradusă din limba greacă de *V. Marian* . . . . . Lei 250

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărțile VII—IX de Aritmetică și Cartea X a Iraționalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . Lei 300

III. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărțile XI—XIII de Geometrie în spațiu; Cartea XIV a lui HYPSICLE și Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 200

Biblioteca Matematică „GEORGE ȚIȚEICA"

I. **Ion Ionescu,** *Maxime și minime geometrice* . . . . . Lei 160

Suplimentul cu Exerciții. Abonamentul anual (9 numere) . . . Lei 100

„Gazeta Matematică" apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 300 lei anual, se plătește înainte și începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului și nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele și toată corespondența se trimite pe adresa:

Societății „GAZETA MATEMATICĂ"

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviței No. 158. — București 2.

(Telefon: 3-9803).

M. O., IMPRIMERIA NAȚIONALĂ. — C. 17.749

1942-43 –

GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCIŢII

ANUL IX. No. 9 1 IUNIE 1943

BIBLIOTECA CENTRALĂ „ASOCIAȚIUNII" SIBIIU

Primele 5 numere ale Suplimentului pe acest an fiind epuizate, nu putem trimite noilor abonaţi decât numerele 6, 7, 8, 9, contra costului de 80 lei.

SOCIETATEA GAZETA MATEMATICĂ
CALEA GRIVIŢEI, 158. BUCUREŞTI 2. — TELEFON 3-9809

GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCIŢII

ANUL IX. No. 9 — 1 IUNIE 1943

ABONAMENTUL LEI 100 PE AN (9 numere)

Soluţii şi orice corespondenţă pe adresa:

Casa «Gazeta Matematică», Calea Griviţei 158. — Bucureşti 2

REZULTATUL CONCURSULUI DE MECANICĂ

In lunile Februarie, Martie şi Aprilie ale acestui an, s'a ţinut al 2-lea Concurs anual de Mecanică pentru corespondenţii *Suplimentului Gazetei Matematice.*

Rezultatul a fost atât de mulţumitor, încât am fost nevoiţi să dăm 2 premii I pentru cei doi condidaţi ale căror soluţii au fost cele mai bune.

Pentru a nu se împărţi în două premiul de 2000 lei, D-l Ing. D. STOICA, cu generozitatea D-sale bine cunoscută, a mai oferit suma de 2000 lei, astfel încât premiile vor fi următoarele:

Premiul I se acordă D-lor DONŢU GH. cl. VIII-a Iaşi şi DUMITRESCU F. DAN cl. VII-a Lic. Sf. Sava Bucureşti. D-l DONŢU a trimis soluţii exacte la toate problemele propuse, redijate foarte îngrijit, şi arătând o bună înţelegere a Mecanicei.

I se acordă suma de lei 2000, precum şi volumul *Probleme de Statică* de AL. I. STOENESCU.

D-l DUMITRESCU F. DAN dă de asemenea soluţii foarte bune tuturor problemelor propuse, redijate în mod clar şi precis.

I se acordă suma de lei 2000 precum şi volumul *Probleme de Calcul Vectorial* de GABRIELA ŢIŢEICA şi AL. STOENESCU.

Premiul II în valoare de 1000 lei precum şi volumul *Unităţi de măsură în Mecanică* se acordă D-lui SĂFTOIU ELIDOR cl. VIII-a Lic. Lazăr Bucureşti.

Inafara acestor premiii se mai acordă următoarele menţiuni pentru buna rezolvare a problemelor trimise, în ordinea clasificării, Domnilor:

1. VASILIU D-TRU cl. VII-a Lic. mil. Iaşi; AL. STOENESCU: *Probleme de Oscilaţii.*

2. ANDREESCU MIHAI cl. VII-a Lic. mil. Iaşi; AL. STOENESCU *Probleme de Dinamică.*

3. CARAMALĂU EUGEN cl. VIII-a Lic. Traian T.-Severin; AL. STOENESCU: *Teoria Relativităţii.*

4. GÂŢĂ GHEORGHE cl. VII-a Lic. T. Vladimirescu Tg.-Jiu: AL. STOENESCU: *Probleme de Dinamică* (*Ciocniri*).

5. GAZA CORNELIU cl. VII-a Lic. T. Vladimirescu Tg.-Jiu; AL. STOENESCU: *Teoria Relativităţii.*

DELEGAŢI PENTRU RAPOARTE
GABRIELA ŢIŢEICA şi AL. STOENESCU.

EXERCIŢII REZOLVATE

Clasa VIII-a. *Exerc. 572. Se prelungeşte latura* BC *a triunghiului echilateral* ABC *cu lungimea* $\overline{CD} = \overline{BC}$. *Prin* D *să se ducă o secantă* Δ *care să taie pe* AB *şi* AC *în* E *şi* F, *astfel în cât suprafeţele* ABC, AEF *şi* BEFC *să fie în progresie aritmetică.*

GH. B.

Notăm

$\overline{AE} = x$; $\overline{AF} = y$; $ABC = S$; $AEF = S_1$; $BEFC = S_2$.

Deosebim 3 cazuri, după poziţiile punctelor E, F pe laturile AB, AC sau pe prelungirile lor.

Cazul I. E *şi* F *se află pe laturile* AB, AC. In acest caz avem:

(1) $S = S_1 + S_2$ cu (2) $S_1 < S_2 < S$ sau (3) $S_2 < S_1 < S$.

Sub cazul 2 dă pentru condiţiile problemei

$$(4) \qquad S_2 = \frac{S + S_1}{2}.$$

Rezolvind sistemul (1) şi (4) în S_1 şi S_2 găsim

$$S_1 = \frac{S}{3} \quad , \quad S_2 = \frac{2S}{3}.$$

Dar, dacă a este latura triunghiului echilateral, atunci

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \text{ şi deci } S_1 = \frac{a^2\sqrt{3}}{12},\quad S_2 = \frac{2a^2\sqrt{3}}{12}.$$

Valoarea lui S_1 mai este dată de produsul $\frac{xy}{2}\sin 60^0$, aşa că pentru găsirea lui x sau y avem o primă ecuaţie

$$\frac{xy\sin 60^0}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{12} \quad \therefore \quad xy = \frac{a^2}{3}. \qquad (5)$$

Pe de altă parte aplicând teorema lui MENELAUS triunghiului ABC, tăiat de transversala DFE găsim

$$\frac{x}{a-x}\cdot\frac{2a}{a}\cdot\frac{a-y}{y} = 1$$

$$\therefore \qquad 2ax = ay + xy. \qquad (6)$$

Scot pe y din (5), îl duc în (6) şi găsesc ecuaţia

$$6x^2 - ax - a^2 = 0$$

ale cărei rădăcini sunt

$$x_1 = \frac{a}{2} \quad \text{şi} \quad x_2 = -\frac{a}{3}.$$

Prima arată *că punctul* E *este mijlocul lui* AD. *Deci dreapta* Δ *cerută este dreapta care uneşte pe* D *cu mijlocul lui* AB.

Valoarea lui x_2 nu este admisibilă căci dă pe E pe prelungirea BA, contrar ipotezei cazului I.

Sub cazul (3) dă, pentru condiţiile problemei

$$(7) \qquad S_1 = \frac{S + S_2}{2}.$$

Rezolvând sistemul (1), (7) în S_1, S_2, găsim

$$S_2 = \frac{S}{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{12},\quad S_1 = \frac{2S}{3} = \frac{2a^2\sqrt{3}}{12}.$$

Inlocuind pe S_1 prin $\frac{xy}{2}\sin 60^0$ stabilim ecuaţia

$$xy = \frac{2a^2}{3}$$

care împreună cu (6) duce la ecuaţia

$$3x^2 - ax - a^2 = 0$$

de unde soluţia pozitivă acceptabilă

$$x_1 = a\frac{1+\sqrt{13}}{6}$$

şi soluţia negativă, neacceptabilă pentru cazul I

$$x_2 = a\frac{1-\sqrt{13}}{6}.$$

Cazul II. E *şi* F *se află pe prelungirile* BA, CA *ale laturilor triunghiului.* In acest caz facem două interpretări.

Prima interpretare. Suprafaţa BEFC este *numai* suprafaţa închisă în conturul determinat de ordinea în care se citesc literele BEFC. Pentru această interpretare avem soluţiile

$$x_2 = -\frac{a}{3} \quad \text{şi} \quad x_2 = a\frac{1-\sqrt{13}}{6}$$

unde

$$\textit{Supr.}\ \text{BEFC} = \textit{Supr.}\ \text{BAC} + \textit{Supr.}\ \text{AEF}.$$

A doua interpretare. Suprafaţa BEFC este suprafaţa limitată de laturile BC, CE, EF, FB. In acest caz avem

$$S_1 = \text{Supr. AEF} = \frac{xy}{2}\sin 60 = \frac{xy\sqrt{3}}{4} \qquad (1)'$$

şi

$$S_2 = S + S_1 + \textit{Supr.}\ \text{CAE} + \textit{Supr.}\ \text{BAE}.$$

Dar

$$\text{Supr. CAE} = S_3 = \frac{ax}{2}\sin 120^0 = \frac{ax\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Supr. BAE} = S_4 = \frac{ay}{2}\sin 120^0 = \frac{ay\sqrt{3}}{4}$$

deci

$$S_2 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{xy\sqrt{3}}{4} + \frac{ax\sqrt{3}}{4} + \frac{ay\sqrt{3}}{4}. \qquad (2)'$$

In această interpretare putem avea

$$S = \frac{S_1 + S_2}{2} \quad \text{sau} \quad S_1 = \frac{S + S_2}{2}.$$

Inlocuind aici pe S şi S_1 prin valorile lor găsim

$$S_2 = 2S - S_1 = \frac{2a^2\sqrt{3}}{4} - \frac{xy\sqrt{3}}{4} \qquad (3)'$$

şi

$$S_2 = 2S_1 - S = \frac{2xy\sqrt{3}}{4} - \frac{a^2\sqrt{3}}{4}. \qquad (4)'$$

Ducând pe (3)′ şi (4)′ succesiv în (2)′ găsim

$$2xy + ax + ay - a^2 = 0 \qquad (5)'$$

$$xy - ax - ay - 2a^2 = 0. \qquad (6)'$$

Pe de altă parte teorema lui MENELAUS aplicată la cazul figurii conduce la ecuaţia

$$y = \frac{2ax}{a - x}. \qquad (7)'$$

Sistemul (5)′, (7)′ dă

$$x = \frac{-2a \pm a\sqrt{7}}{3}$$

din care numai soluţia negativă este admisibilă.

Sistemul (6)′ şi (7)′ dă

$$x = a \quad \text{şi} \quad x = \frac{-2a}{3}$$

din care numai ultima acceptabilă.

Deci în interpretarea a doua sunt 2 drepte Δ răspunzând problemei.

Cazul III. Punctele E şi F sunt pe prelungirile AB şi AC. In acest caz

$$S_1 = S + S_2 .$$

Procedând ca în cazurile precedente găsim soluţii imaginare.

Exerciţii generale. *E. G. 509. Să se rezolve ecuaţia:*

$$\varphi_4(5^x . 7^y) = 1344.$$

I. L.

Observăm că $1344 = 2^6 . 3 . 7$, deci vom avea dela început: $x < 4$ şi $y = 5$.

Apoi cum:

$$\varphi_1 = 2^3 . 3 . 5^{x-1} . 7^{y-1}$$

$$\varphi_2 = 2^6 . 3 . 5^{x-2} . 7^{y-2}$$

$$\varphi_3 = 2^9 . 3 . 5^{x-3} . 7^{y-3}.$$

Urmează că vom avea $x = 1$ deoarece factorul 5 trebuie să dispară dela prima indicare, altfel vom obţine pentru 2 un exponent mai mare ca 6.

Aşa dar avem:

$$x = 1 \quad \text{şi} \quad y = 5.$$

Adică:

$$\varphi_1(5 . 7^5) = 2^3 . 3 . 7^4$$

$$\varphi_2(5 . 7^5) = 2^4 . 3 . 7^3$$

$$\varphi_3(5 . 7^5) = 2^5 . 3 . 7^2$$

$$\varphi_4(5 . 7^5) = 2^6 . 3 . 7 = 1344.$$

I. L.

E. G. 510. Dacă $\varphi_i(N)$ *reprezintă indicatorul de ordinul* i *a lui* N, *să se rezolve ecuaţia:*

$$\varphi_x(1943) = 1.$$

I. L.

Cum avem $1943 = 29.67$, urmează că:

$$\varphi_1 = 2^3.3.7.11$$

$$\varphi_2 = 2^5.3.5$$

$$\varphi_3 = 2^7$$

$$\ldots\ldots$$

$$\varphi_{10} = 1$$

deci $x = 10$.

I. L.

E. G. 511. Dacă $P_x(y)$ *reprezintă produsul numerelor prime cu* y *din şirul natural al numerelor până la* x, *să se calculeze:*

$$P_{50}(30) \quad \text{şi} \quad P_{30}(50).$$

I. L.

Dacă $a, b, c, \ldots$ reprezintă factorii primi ai lui y, atunci avem

$$P_x(y) = \frac{x!\,\Pi E\left(\frac{x}{a.b}\right)!\ldots\Pi(ab)^{E\left(\frac{x}{ab}\right)}\ldots}{\Pi E\left(\frac{x}{a}\right)!\,\Pi\left(\frac{x}{abc}\right)!\ldots\Pi(a)^{E\left(\frac{x}{a}\right)}.\Pi(abc)^{E\left(\frac{x}{abc}\right)}\ldots}.$$

In cazul nostru avem:

$$P_{50}(30) = \frac{50!\,8!\,5!\,3!\,6^8.10^5.15^3}{25!\,16!\,10!\,1!\,2^{25}.3^{16}.5^{10}.30^1}$$

$$= 1.7.11.13.17.19.23.29.31.37.41.43.47.49$$

şi

$$P_{30}(50) = \frac{30!\,3!\,10^3}{15!\,6!\,2^{15}.5^6.}$$

$$= 1.3.7.9.11.13.17.19.21.23.27.29.$$

Se observă că:

$$\frac{P_{50}(30)}{P_{30}(50)} = \frac{7.31.37.41.43.47}{3^7} > 1.$$

I. L.

E. G. 513. Dacă p *este un număr prim absolut, atunci:*

$$\varphi[(p-1)!+1] = M(p-1)$$

unde $\varphi(i)$ *însemnează indicatorul lui* i.

I. L.

După teorema lui WILSON avem:

$$(p-1)!+1 = k \cdot p = k' \cdot p^{\varepsilon}$$

unde k' este prim cu p şi $\varepsilon \geqslant 1$.

Atunci:

$$\varphi(k' \cdot p^{\varepsilon}) = p^{\varepsilon-1} \cdot (p-1) \cdot \varphi(k') = M(p-1).$$

I. L.

E. G. 514. In câte moduri se pot descompune numerele:

$$N_1 = a^{\alpha} \cdot b^{2\beta+1} \quad \text{şi} \quad N_2 = a^{2\alpha} \cdot b^{2\beta}$$

într'un produs de doi factori, neţinând seamă de ordinea factorilor.

I. L.

Fie d_i şi $d_{n-(i-1)}$ divizorii conjugaţi a lui N, atunci:

$$d_i \cdot d_{n-(i-1)} = N.$$

Dacă n este par, înseamnă că unul din exponenţii factorilor primi a lui N este impar, atunci nu vom avea doi factori egali, adică nu vom avea $i = n-(i-1)$. Dacă n este impar, adică toţi exponenţii factorilor primi a lui N sunt pari, atunci avem $i = \frac{n+1}{2}$, deci vom avea doi factori egali.

In consecinţă, în primul caz numărul de descompuneri va fi:

Pentru N_1 egal cu $\frac{1}{2}(\alpha+1)[(2\beta+1)+1] = (\alpha+1)(\beta+1)$.

Pentru N_2 „ „ $\frac{1}{2}[1+(2\alpha+1)(2\beta+1)]$.

I. L.

E. G. 515. Ştiind că n *este divizor a lui* N *şi* $\varphi(i)$ *indicatorul lui* i, *atunci:*

$$\varphi(n \,.\, N) = n \,.\, \varphi(N).$$

I. L.

Fie:

$$N = \prod_{1}^{m} a_i^{\alpha_i} \quad \text{şi} \quad n = \prod_{k}^{m} a_i^{\beta_i} \cdot$$

Atunci:

$$\varphi(n \,.\, N) = \prod_{1}^{k-1} a_i^{\alpha_i - 1}(a_i - 1) \,.\, \prod_{k}^{m} a_i^{\alpha_i + \beta_i - 1}(a_i - 1)$$

şi

$$n \,.\, \varphi(N) = \prod_{k}^{m} a_i^{\beta_i} \cdot \prod_{1}^{m} a_i^{\alpha_i - 1} \cdot (a_i - 1)$$

$$= \prod_{1}^{k-1} a_i^{\alpha_i - 1}(a_i - 1) \,.\, \prod_{k}^{m} a_i^{\alpha_i + \beta_i - 1}(a_i - 1).$$

I. L.

E. G. 516. In ce caz numărul divizorilor unui număr dat este o putere perfectă?

I. L.

Dacă

$$N = a^{\alpha} \,.\, b^{\beta} \ldots .$$

atunci:

$$n(N) = (\alpha + 1)(\beta + 1) \ldots .$$

Trebuie deci să avem:

$$\alpha = p^m - 1 \quad ; \quad \beta = q^m - 1 \,; \ldots .$$

Deci:

$$n(N) = (p \,.\, q \ldots .)^m.$$

I. L.

E. G. 517. Dacă $S_{x \to y}(z)$ *reprezintă suma numerelor prime cu* z *din şirul numerelor naturale dela* x *la* y, *să se calculeze suma:*

$$S_{100 \to 200}(100) + S_{100 \to 200}(200).$$

I. L.

Avem:

$$S_{x \to y}(z) = S_y(z) - S_x(z).$$

Deci:

$$S_{100 \to 200}(100) = S_{200}(100) - \sigma(100)$$

$$S_{100 \to 200}(200) = \sigma(200) - S_{100}(200).$$

Unde:

$$S_x(z) = \frac{1}{2} x \,.\, (x+1) - \Sigma \frac{a}{2} E\left(\frac{x}{a}\right)\left[1 + E\left(\frac{x}{a}\right)\right]$$

$$+ \Sigma \frac{ab}{2} E\left(\frac{x}{ab}\right)\left[1 + E\left(\frac{x}{ab}\right)\right]$$

. . . . . .

iar a, b, c... sunt factorii primi ai lui z.

Cum 100 şi 200 au aceiaşi factori primi, urmează că:

$$S_{100}(200) = \sigma(100)$$

$$S_{200}(100) = \sigma(200).$$

Prin urmare suma va fi:

$$2\,[\sigma(200) - \sigma(100)] = 12.000.$$

Deoarece

$$\sigma(200) = \frac{1}{2} \,.\, 200 \,.\, \varphi(200) = 8000$$

$$\sigma(100) = \frac{1}{2} \,.\, 100 \,.\, \varphi(100) = 2000.$$

I. L.

Până la 10 Mai 1943 s'au primit soluții bune (la exercițiile propuse în numerele 6, 7, 8, ale anului al IX-lea)(*) dela:

Liceul de fete „Elena Ghiță Birta", Arad.

Clasa VIII-a: Păunescu G. Liliana (VIII: 596, 601, 17).

Liceul „Moise Nicoară", Arad.

Clasa VII-a: Fleșeriu I. (VII: 694).

Liceul de fete, Beiuș.

Clasa IV-a: Oala A. Ana (IV: 653, 5).

Liceul „Samuil Vulcan", Beiuș.

Clasa V-a: Moldovan I. M. (V: 770: 5).
Clasa VI-a: Malița M. (VI: 771, 8, 86).

Liceul „N. Bălcescu", Brăila.

Clasa V-a: Novac I. I. (V: 770, 1, 6, 8*, 80*).
Clasa VII-a: Marin Th. M. (VII: 685, 6*, 94, 8, 703).

Liceul „Dr. Ioan Meșotă", Brașov.

Clasa IV-a: Groncea V. (IV: 660, 1, 2).
Clasa VI-a: Stroe I. Tr. (VI: 777).

Liceul de fete „Carmen-Sylva", București.

Clasa IV-a: Maxim N. Magdalena (IV: 655).
Clasa VII-a: Maxim Viorica (VII: 693*, 703).

Liceul de fete „Iulia Hasdeu", București.

Clasa III-a: Barbu Ana (III: 222; IV: 653, 7).

Colegiul Național „Sf. Sava", București.

Clasa VI-a: Alexandru Gr. M. (VI: 674, 5, 7, 8, 9); Dumitrescu N. I. (VI: 771, 2, 3*, 5); Soare V. Mircea (VI: 772, 5, 8, 80).
Clasa VII-a: Horbuniev P. Vasile (VII: 684); Mișicu V. Mircea (VII: 681).

---

*) Numărul unui exercițiu foarte bine rezolvat și îngrijit redijat este însoțit de semnul *.

Liceul „Gheorghe Lazăr", Bucureşti.

Clasa VI-a: Costescu I. Lucian (VI: 775, 9, 84).

Liceul „Titu Maiorescu", Bucureşti.

Clasa V-a: Timiş A. D. (V: 773, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 80, 1).
Clasa VI-a: Cantuniari C. (VI: 771*, 2, 3, 80), Codreanu N. (VI: 773, 5); Ieşan Al. (VI: 772); Mustăcescu V. Tr. (VI: 772, 3, 5); Stancu Z. H. (VI: 772, 3); Ulieru C. M. (VI: 773, 7, 9).

Liceul „Gheorghe Şincai", Bucureşti.

Clasa VII-a: Ene A. I. (VII: 684).

Liceul „Aurel Vlaicu", Bucureşti.

Clasa V-a: Mihail A. L. (V: 770, 1*, 4; VI: 771*).
Clasa VI-a: Marinescu Em. (VI: 780, 1).

Liceul „Matei Basarab", Bucureşti.

Clasa VI-a: Muntz E. Ed. (VI: 772, 5, 86; VIII: 598, 613).
Clasa VII-a: Antonescu D. E. (VI: 689, 90*, 1*, 4, 8, 702, 3, E. G.: 518); Popescu N. Şt. (VI: 689, 90, 1, 4, 8, 702, 3, E. G.: 518).

Liceul „Cantemir Vodă", Bucureşti.

Clasa VI-a: Cociumean D. I. (VI: 764).

Liceul „Spiru Haret", Bucureşti.

Clasa VIII-a: Teodorescu Tr. (VIII: 608, 9, 10, 2, 5, 6, 7, 9).

Liceul „Sf. Iosif" Bucureşti.

Clasa VI-a: Leţia L. V. (VI: 772, 3*, 4; VII; 683).

Liceul „Ştirbey Vodă", Călăraşi-Ialomiţa.

Clasa IV-a: Ionescu C. C. (IV: 651; V: 770, 1*, 2); Mitrănescu E. (IV: 655).
Clasa VI-a: Dumitrescu I. I. (VI: 775).
Clasa VIII-a: Ionescu C. V. (VIII: 610, 4, 5).

Liceul „Ioniţă Assan", Caracal.

Clasa VI-a: Barbu A. I. (VI: 772, 5, 82, 7); Gheorghe A. Gr. (VI: 770, 2, 5, 7, 82, 7).

Liceul Militar „Ștefan cel Mare", Cernăuți.

Clasa IV-a: Popescu A. S. (VI: 651); Vrânceanu V. (IV: 651).
Clasa V-a: Grigoraș G. (V: 776).
Clasa VI-a: Nicolaescu T. V. (VI: 756, 77).
Clasa VII-a: Rang A. C. (VII: 694).

Liceul „Mircea cel Bătrân", Constanța.

Clasa VII-a: Gheorghic H. G. (VII: 688, 96, 7, 8*, 702, 3).

Colegiul Național „Carol I", Craiova.

Clasa VII-a: Cunescu I. C. (VII: 692, 4); Dundaru I. A. (VII: 692)

Liceul „Ion Maiorescu", Giurgiu.

Clasa VIII-a: Palada T. Gr. (VIII: 576, 8, 91).

Liceul Internat, Iași.

Clasa V-a: Curelaru D. I. (V: 770, 8*).

Liceul Militar, Iași.

Clasa III-a: Crivăț C. M. (III: 222); Enăchescu V. T. (III; 223); Faghel D. Gh. (III: 224); Gheorghe V. P. (III: 223); Huiduș N. Al. (III: 222); Mardare N. (III: 224); Pavel H. C. (III: 224); Platon C. Fl. (III: 224); Pietrecanu I. A. (III: 224); Tofan C. A. (III: 222); Toma Oct. (III: 319, 24).

Clasa IV-a: Bârsăneanu M. V. (IV: 661); Calcan V. V. (IV: 656, 8, 9); Diaconu Gh. (IV: 652); Iacobeț Gh. N. (IV: 609, 61); Olaru Gh. Ad. (IV: 658, 9, 60, 1, 2); Pintilie A. P. (IV: 655); Vlad Mircea (IV: 659, V: 781).

Clasa V-a: Alfons H. (V: 775); Ciumașu V. (V: 329); Haisuc M. (V: 766); Ionescu I. Ed. (V: 766); Nache D. D. (V: 781, 2, E. G.: 518); Ruseu L. (V: 775); Vartic Gh. (V: 766).

Clasa VI-a: Mihăilescu I. St. (V: 786); Vintilă Gh. C. (VI: 778).

Clasa VII-a: Andrei A. (VII: 677, 84); Andriescu M. (VII: 702*); Bosincianu C. (VII: 684, 95); Rădulescu Gh. M. (VII: 680, 6); Vasiliu G. D. (VII: 674*, 7, 8, 80, 90*, 8*, 702, 3, VIII: 613; E. G.: 518); Turculeț Tib. (VII: 680), Țicăbiu D. Oct. (VII: 686).

Liceul teoretic de fete, Piatra-Neamț.

Clasa VII-a: Secărescu C. M. (VII: 694*, 5).

Liceul „I. C. Brătianu", Pitești.

Clasa V-a: Mânecă M. C. (V: 770, 1, 2).
Clasa VI-a: Argeșeanu H. R. (VI: 764, 5).
Clasa VIII-a: Florescu L. (VII: 685, 6, 9).

Liceul de fete „Despina Doamna", Ploiești.

Clasa VII-a: GEORGESCU A. MARIA (VII: 684, 5, 6, 94, 9).

Liceul „Sf. Petru și Pavel", Ploiești.

Clasa V-a: CONSTANTINESCU R. M. (V: 770*, 1*, 2, 3, 4, VI; 773, VII: 683, 6, VIII: 597, E. G.: 518); MIHAI R. C. (V: 764, 8, VI: 770, 2, 5, VIII: 608).

Clasa VII-a: VINTILESCU A. G. (VII: 680, 5, 6*, 94).

Clasa VIII-a: CĂTUNEANU TR. (VIII: 612, 3, 4*, 6, 7); JUPCIANU N. N. (VIII: 696).

Colegiul Național „N. Filipescu", Predeal.

Clasa V-a: VOLANSCHI A D. (V: 766, 70, 1, 6, 7, 8, 9).

Clasa VI-a: COLUMBEANU D. P. (VI: 771, 80, 1, VII: 683, 5, 6).

Clasa VII-a: ILIESCU C. C. (VII: 692*, 5, 8*, 700, 1, 2, E. G.: 518); JURIST C. V. (VII: 683, 5, 6, VIII: 597).

Gimnaziul „Principele Nicolae", Sinaia.

Clasa III-a: NICULESCU M. (III: 226); PROFIREANU D. (III: 222, 6).

Clasa IV-a: ROMAN E. (IV: 659).

Liceul „Tudor Vladimirescu", Târgu-Jiu.

Clasa VII-a: GIURCONIU G. M. (VII: 685, 9, 94, 8).

Liceul Militar „Mihai Viteazul", Timișoara.

Clasa IV-a: FLORIAN P. (IV: 659); STANCIU V. P. (IV: 659, 61, 2).

Clasa V-a: VRÂNCEANU GH. GH. (VI: 788, E. G.: 518): TEODORESCU A. AL. (V: 771).

Clasa VI-a: BANCU EM. (VI: 778); BIRISTEICĂ V. P. (VI: 778); COMAN V. (VI: 778); DUMITRESCU I. (VI: 778); MINCULESCU C. (VI: 778); NEDELCU A. (VI: 778); POPESCU I. B. (VI: 772, 3, 5); ȘTEFĂNESCU GH. (VI: 778); STRATI P. I. (VI: 778).

Clasa VIII-a: OPREA D. GH. (VIII: 605, 6, 7, 9, 12, 3, 4*, 7); VITĂNESCU C. (VIII: 612, 13).

Liceul „C. Diaconovici Loga", Timișoara.

Clasa VI-a: TINCU C. C. (VI: 771, 5, 7, 8, E. G.: 518).

Liceul „Regele Ferdinand I", Turda.

Clasa VII-a: IGHIAN I. M. (VII: 684, 5).

Liceul „Sf. Haralambie", Turnu-Măgurele.

Clasa V-a: HAGIESCU V. M. (V: 770, 6).

Liceul teoretic de fete, Turnu-Severin.

Clasa VI-a: Firoiu I. Maria (VI: 773, 5, 7, 9*).

Liceul „Traian", Turnu-Severin.

Clasa IV-a: Anghelescu A. Gh. (IV: 652, 2, 4).

Clasa V-a: Braşoveanu D. Gh. (V: 770, 2, 6); Cosmulescu V. (V: 770, 9); Ioaniţescu D. P. (V: 770*, 2, 6, 7); Nicolicioiu L. I. (V: 772, 3, 9, 82).

Clasa VI-a: Boldea D. C. (VI: 675, 86; VII: 685, 6, 94, 702, 3; VIII: 612, 3); Coravias P. N. (VI: 779*); Dafinescu I. I. (VI: 777); Drăgoi P. M. (VI: 777, 9).

Clasa VII-a: Ionescu P. L. (VII; 685, 6).

Clasa VIII-a: Gionea A. C. (VIII: 596*, 8*, 601, 2*, 5*, 7*, 90, 3, 7).

Liceul „M. Kogălniceanu" Vaslui.

Clasa III-a: Iulian D. C. (III: 225).

Elevi curs particular.

Clasa VIII-a: Ţigănoiu Al. (VIII: 605*, 8, 9, 10, 2, 7).

EXERCIŢII PROPUSE

Soluţiile exerciţiilor propuse în acest număr se primesc până la 1 Septembrie 1943

Clasa III-a. *Exerc. 234.* Trei triunghiuri dreptunghice asemenea se aşază cu ipotenuzele cap la cap, catetele omoloage fiind paralele. Notăm triunghiurile ABC, CDE, EFG, unghiurile drepte fiind în B, D, F.

Se dă: $\overline{AB} = 39$ m ; $\overline{CD} = 30$ m, $\overline{EF} = 21$ m şi $\overline{AG} = 120$ m.

1°. Să se calculeze ipotenuzele $\overline{AC}$, $\overline{CE}$, $\overline{EG}$.

2°. Să se calculeze aria triunghiului ABC.

3°. Să se calculeze lungimea $\overline{BD}$ cu două zecimale exacte.

G. D. S.

III. 235. Trapezul dreptunghic ABCD ($\hat{A} = \hat{B} = 90^0$) are aria S egală cu 187,50 m^2, baza mare $\overline{BC} = 17{,}5$ m, iar baza mică $\overline{AD} = 7{,}5$ m. Laturile AB și CD prelungite se întâlnesc în punctul O.

1^0. Să se calculeze latura $\overline{DC}$ cu două zecimale exacte.

2^0. Să se calculeze lungimile $\overline{OA}$ și $\overline{OD}$.

G. D. S.

III. 236. Diagonalele AC și BD ale unui trapez se întâlnesc în punctul O și sunt perpendiculare. Perimetrul triunghiului ABC este de 14,6 cm, iar laturile $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ sunt proporționale cu 3, 4, 5.

1^0. Să se arate că triunghiul ABC este dreptunghic. Unde este unghiul drept?

2^0. Să se calculeze perimetrul trapezului și aria lui.

3^0. Să se calculeze segmentele $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, $\overline{OD}$.

G. D. S.

Clasa IV-a. *Exerc. 667.* Să se verifice identitatea:

$$-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{m-n}\left[\frac{m+p-2n}{m}-\frac{n+p-2m}{n}\right]+$$

$$+\frac{1}{3mn}(m+n-2p)=-\frac{m+n}{mn}.$$

N. M.

IV. 668. Să se verifice identitatea:

$$n(4mp-m^2-np-2mn)-m(4np-n^2-mp-2mn)=$$

$$=(m-n)(mn+np+pm)=n(5m^2-2mn+2mp-np)-$$

$$-m(4mn-n^2-mp-2np.$$

N. M.

IV. 669. Să se verifice identitatea:

$$(2mp+np+m^2-4mn)-(2np+mp+n^2-4mn)=$$

$$=(m+n+p)(m-n)=(2mp+2mn+m^2-5np)-$$

$$-(2mn+mp+n^2-4np).$$

N. M.

IV. 670. Se dă o sferă O de rază R şi diametrul ei $\overline{AB}$, pe care îl prelungim cu segmentul $\overline{BI} = \frac{1}{3} R$. Din I ducem tangentele la sferă. Ele formează un con tangent sferei după cercul mic (TT'). Din B ducem paralele la generatoarele conului (I), care paralele formează un nou con (B). Conul (B) taie sfera după cercul (CC'). Să se calculeze raportul suprafeţelor şi al volumelor celor două conuri (I) şi (B).

O. N. Ţ.

Clasa V-a. *Exerc. 790.* Se dă linia frântă ABCD aşa încât

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD}.$$

Se construieşte rombul ABCE şi se notează cu F şi G intersecţiile lui AB respectiv cu DC, DE şi cu H intersecţia lui DA cu paralela din G la AE. Să se demonstreze că triunghiul FGH este isoscel.

Gh. B.

V. 791. Se dă trapezul isoscel ABCD cu laturile egale $\overline{AD}$, $\overline{BC}$ şi cu diagonalele $\overline{AC}$, $\overline{BD}$. Pe $\overline{AD}$, între A şi D, se ia un punct M. Fie N un punct pe BC, între B şi C, aşa încât $\overline{DM} = \overline{BN}$.

Se complectează paralelogramul MNBP. Se cere locul punctului P, când M se mişcă pe AD.

Gh. B.

V. 792. Să se arate că dacă ecuaţia

$$9a^2x^2 + 2a(8 - 3a^2)x + a^4 = 0$$

are rădăcinile reale, atunci

$$a \cdot \frac{a^2 - 12}{3a^2 - 4}$$

este de semnul lui a.

Gh. B.

V. 793. Să se desfacă expresia:

$$E \equiv 2(x^4 + y^4) + 7xy(xy - x^2 - y^2)$$

în doi factori de forma: $m(x^2 + y^2) + nxy$.

N. M.

V. 794. Să se arate, că:

$$\Sigma x^2[3x^5 + 5x^3(y^2 + z^2) - 2(y^5 + z^5)] = 3(x^2 + y^2 + z^2)(x^5 + y^5 + z^5).$$

N. M.

V. 761).* Dacă $\overline{AA'}$ este înălţime şi $\overline{BB'}$ bisectoare în triunghiul ABC, atunci egalitatea

$$a \cdot \overline{BA'} = c \cdot \overline{CB'}$$

are loc numai când $\overline{BA'} = \overline{A'B}$ şi reciproc.

GH. B.

Clasa VI-a. *Exerc. 794.* Să se arate, că:

$$\sin^2 x(\sin^2 x - 3\cos^2 x)^2 + \cos^2 x(\cos^2 x - 3\sin^2 x) = 1.$$

N. M.

VI. 795. Se dă un cilindru drept cu bazele cercuri cu centrele O şi O'. Fie $\overline{AB}$ şi $\overline{A'B'}$ doi diametri paraleli ale acestor cercuri şi P un punct pe AB. Prin OO' se duce un plan perpendicular pe planele cercurilor O şi O' şi care taie aceste cercuri în punctele M şi N, de aceeaşi parte a diametrelor AB, A'B' şi aşa în cât

$$\sphericalangle AOM = \sphericalangle A'O'N = \sphericalangle APO'.$$

Se proiectează M în Q pe AB. Să se demonstreze că $\overline{MQ}$ este egal cu *înălţimea cilindrului* şi că

$$\overline{PQ} = \overline{AB} \cos \widehat{APO'}.$$

GH. B.

---

*) Exerciţiul *761* propus la pag. *54* din acest an având enunţul greşit, se publică din nou îndreptat şi complectat.

VI. 796. Se dă un cerc (O) cu raza R şi centrul O; un diametru al său $\overline{AB}$ şi un punct S pe prelungirea lui $\overline{AB}$ astfel ca $\overline{SB} = \frac{R}{2}$. Să se determine unghiul pe care trebuie să-l facă o secantă SDE cu SA astfel ca partea exterioară a ei să fie egală cu raza. Aplicaţie R = 15 cm.

O. N. Ţ.

VI. 797. Se roteşte figura din problema precedentă în jurul diametrului AB; coarda $\overline{DE}$ naşte suprafaţa unui trunchiu de con.

Să se calculeze suprafaţa totală şi volumul acelui trunchiu de con.

O. N. Ţ.

VI. 798. Să dă un cerc (O) cu centrul O şi cu raza R; un diametru $\overline{AB}$ al său şi o direcţie (Δ) făcând cu AB unghiul θ. Se construieşte tangenta TS la cerc, care întâlneşte pe AB în S şi are punctul de contact T. Se roteşte întreaga figură în jurul dreptei AB.

Să se calculeze: *a)* Volumul conului înnăscut care are generatoarea $\overline{ST}$.; *b)* Volumul şi suprafaţa înnăscută din rotirea triunghiului AOT în jurul lui AB. Aplicaţie: R = 5 cm; $\theta = 30^0$.

O. N. Ţ.

VI. 799. Se dă o sferă (O) cu centrul O şi raza R. Unde trebuie luat pe diametrul AB vârful S al unui con circular drept şi ce unghiu de deschidere trebuie să aibă acest con, pentru ca el să intersecteze sfera după două cercuri mici: unul cu diametrul cât *jumătatea razei,* celălalt cu diametrul *cât* $\frac{3}{2}$ *din rază.*

Să se calculeze suprafaţa laterală şi volumul trunchiului de con înscris în sferă. Aplicaţie: R = 1.

O. N. Ţ.

Clasa VII-a. *Exerc. 711.* Să se traseze curba reprezentată prin ecuaţia:

$$x^2 + xy + 1 = 0$$

şi să i se afle în mod elementar asimptotele.

V. Gh.

VII. 712. Să se studieze variaţia funcţiei:

$$y = x^{n+p} + x^p + \alpha$$

şi să se deducă numărul rădăcinilor reale ale ecuaţiei:

$$x^{n+p} + x^p + \alpha = 0,$$

n şi p numere întregi pozitive.

O. N. Ţ.

VII. 713. Să se studieze variaţia funcţiei:

$$y = x^{n+p} + \alpha x^p + 1$$

şi să se deducă numărul rădăcinilor reale ale ecuaţiei:

$$x^{n+p} + \alpha x^p + 1 = 0,$$

n şi p numere întregi pozitive.

O. N. Ţ.

VII. 714. Să se găsească numerele între care sunt cuprinse valorile funcţiei:

$$y = \frac{x^2 - 3x + 4}{x^2 + 5x + 7}.$$

O. N. Ţ.

VII. 715. Să se studieze variaţia funcţiei:

$$y = \frac{2\sin 2x + \operatorname{tg} x}{2\sin 2x - \operatorname{tg} x}$$

şi să se reprezinte această variaţie.

O. N. Ţ.

VII. 716. Să se studieze variaţia funcţiilor, de variabila x, următoare:

$$y = \operatorname{arctg} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \quad , \quad y = \mathrm{L}\left(\frac{1 - x}{1 + x}\right),$$

şi să deducă dacă ecuaţia:

$$\operatorname{arctg} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} - \mathrm{L}\left(\frac{1 - x}{1 + x}\right) = 0$$

are rădăcini reale, când arctg este între O şi π.

O. N. Ţ.

VII. 717. Să se studieze variaţia funcţiei:

$$y = x^2 - \cos 3x,$$

şi să se deducă câte rădăcini reale are ecuaţia

$$x^2 - \cos 3x = 0.$$

O. N. Ţ.

Clasa VIII-a. *Exerc. 628.* Să se arate că cercurile

(C_1) $x^2 + y^2 - \alpha x - \beta y = 0$

(C_2) $x^2 + y^2 + 2\alpha x + 2\beta y - 3\alpha^2 - 3\beta^2 = 0$

(C_3) $x^2 + y^2 - 3\alpha x - 5\beta y + 2\alpha^2 + 4\beta^2 = 0$

au un punct comun. Să se găsească coordonatele acestui punct.

I. I. S.

VIII. 629. Să se rezolve ecuaţia:

$$\frac{(2x^2 - x + 1)(2x^2 + x + 1)}{(x + 5)(x + 7)} = \frac{4x^4}{(x + 6)^2}.$$

I. I. S.

VIII. 630. Să se determine m aşa ca ecuaţia:

$$x^4 - 8x^3 + 11x^2 + 10x + m = 0$$

să aibă două rădăcini inverse.

I. I. S.

VIII. 631. Să ce rezolve ecuaţia:

$$x^3 - 8x^2 + 13x - 6 = 0,$$

ştiind că are o rădăcină dublă.

Cea mai mare rădăcină a ecuaţiei precedente fiind abscisa unui punct C, iar cea mai mică ordonata, să se scrie ecuaţia cercului cu centrul în C şi care taie axa $x'x$ sub un unghiu de 60^0. Tangenta în punctul cel mai de sus al acestui cerc taie axa $y'y$ în punctul B. Să se scrie ecuaţia elipsei care are pe $\overline{OB}$ ca semiaxă mică şi trece prin C.

V. Gh.

VIII. 632. Se dau punctele variabile în plan $A(x, 0)$ şi $B(0, y)$, unde

$$x = \alpha - 1 \quad ; \quad y = 1 - \frac{8}{\alpha} + \frac{12}{\alpha^2},$$

α fiind un parametru care variază dela $-\infty$ la $+\infty$.

Se cere:

1^0. Să se afle locul geometric al punctului $M(x, y)$ şi să se construiască acest loc.

2^0. Să se afle valoarea lui α pentru care dreapta A este paralelă cu dreptele: $21x - 2y - k = 0$ (k variabil).

V. Gh.

VIII. 633. Un echilibrist de greutate Q parcurge dela un capăt la altul o bară AB de lungime *l*, cu greutatea P, aşezată orizontal la o înălţime şi sprijinită la extremităţi. Să se arate că dreapta, care uneşte extremităţile forţelor de reacţie din A şi B, trece printr'un punct fix.

V. GH.

VIII. 634. Fie M mobil pe cercul de diametru $\overline{AB}$. Să se arate că intersecţia înălţimii MM' cu simediana AA' a triunghiului AMB descrie o elipsă.

GH. B.

VIII. 635. Să se rezolve ecuaţia:

$$x^3 + px + 6 = 0,$$

rădăcinile ei fiind legate prin relaţia:

$$nx_1^3 + (n+1)\,x_2^3 + (n+2)\,x_3^3 = 17 - 18n.$$

I. I. S.

Exerciţii Generale. *Exerc. 546.* Să se rezolve în numere întregi ecuaţia:

$$44\ldots4_n \times y + 1 = z^2,$$

în care $44\ldots4_n$ înseamnă numărul 4 scris de *n* ori unul după altul.

GH. B.

E. G. 547. Dacă numărul de *patru* cifre *cdef* este de una din formele $\mathcal{M}11+2$, $\mathcal{M}11+6$, $\mathcal{M}11+7$ sau $\mathcal{M}11+8$, atunci numărul de *douăsprezece* cifre *ababcdefabab,* nu poate fi patrat perfect.

GH. B.

E. G. 548. In câte moduri putem obţine suma 30 din trei numere ?

I. L.

E. G. 549. Ce devine produsul a două numere, dacă pe primul îl sporim cu al doilea şi pe al doilea îl sporim cu primul?

I. L.

E. G. 550. Se dau numerele: 1440, 1800 şi 2500. Să se determine *codivizorul maxim* şi *comultiplul minim* al lor.

I. L.

E. G. 551. Cu ce număr trebuie să înmulţim un număr perfect par, pentru a obţine un patrat sau un cub perfect ?

I. L.

E. G. 552. Ce condiţie trebuie să îndeplinească n pentru ca să avem:

$$a^{m\varphi(p)} - (n \,.\, p)^{m} - 1 = \mathcal{M}\,(m \,.\, n \,.\, p),$$

unde $\varphi(p)$ este indicatorul lui p.

I. L.

E. G. 553. In ce caz numerele a şi b satisfac relaţia:

$$[\sigma\,(a)]^{2\sigma\,(b)} - [\sigma\,(b)]^{2\sigma\,(a)} = \mathcal{M}(a \,.\, b).$$

unde $\sigma(i)$ reprezintă suma numerelor prime cu i şi mai mici de cât i.

I. L.

E. G. 554. Să se găsească forma generală a numerelor care faţă de divizorii 11, 17 dau restul 5, iar faţă de divizorii 7, 13, 19 dau restul 1.

O. N. Ţ.

INSTRUCȚIUNI

Pentru redactarea și trimiterea soluțiunilor exercițiilor publicate în *Gazeta Matematică Supliment cu exerciții* se vor avea în vedere *Instrucțiunile* publicate în numerele 1, 2, 3 pe copertă.

Drepturile de reproducere rezervate Societății «Gazeta Matematică».

Elevii claselor VI, VII și VIII, cu bogată activitate la această revistă își pot lărgi cadrul activității rezolvând probleme din „Gazeta Matematică".

In Biblioteca Societății „Gazeta Matematică" au apărut și se găsesc următoarele:

VII. **Gh. Lazăr,** *Trigonometrie drept liniară* (după cursul predat de **Gh. Lazăr** la colegiul Sf. Sava). . . . . Lei 10

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu și G. Țițeica,** Vocabular Matematic . . . . . Lei 20

X. **G. Țițeica,** Culegere de Probleme de Geometrie . . . Lei 220

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. Istoric, învățăminte. Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 300 / pentru abonații G. M. și S. G. M. . . Lei 150

XII. **V. Cristescu,** Culegere de Probleme de Trigonometrie. Partea I. (Goniometrie) revăzută și adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . Lei 140

XIII. **I. Ionescu,** Culegere de Probleme de Aritmetică. Partea I. Aritmetica rațională . . . . . Lei 250

XIV. **V. Cristescu,** Culegere de Probleme de Trigonometrie. Partea I-a. (Trigonometrie plană). Ediția II-a revăzută și adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 140

XV. **A. G. Ioachimescu,** Culegere de Probleme de Algebră. Partea I. Ediția IV-a revăzută și mărită . . . . . Lei 170

XVI. **G. Țițeica,** Culegere de Probleme de Geometrie Analitică. Partea I. Ediția II-a, adăogită de *N. G. Botea* . . . . . Lei 230

XVII. **A. G. Ioachimescu,** Culegere de Probleme de Algebră. Partea II-a. Ediția IV-a, revăzută și mărită . . . . . Lei 350

XVIII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Mecanică.* Ediția II-a revăzută și adăogită de **Gabriela Țițeica** . . . . . Lei 350

XIX. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea III-a (Trigonometrie sferică). Revăzută și adăogită de G-ralul **Gh. I. Liteanu.** Lei 190

Biblioteca Istorică a GAZETEI MATEMATICE

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărțile I — VI de Geometrie plană) tradusă din limba greacă de *V. Marian* . . . . . Lei 250

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărțile VII—IX de Aritmetică și Cartea X a Iraționalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . Lei 300

III. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărțile XI—XIII de Geometrie în spațiu Cartea XIV a lui HYPSICLE și Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian**. . . . . Lei 200

Biblioteca Matematică „GEORGE ȚIȚEICA"

I. **Ion Ionescu,** *Maxime și minime geometrice* . . . . . Lei 160

Suplimentul cu Exerciții. Abonamentul anual (9 numere) . . . Lei 100

„Gazeta Matematică" apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 300 lei anual, se plătește înainte și începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului și nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele și toată corespondența se trimite pe adresa:

Societății „GAZETA MATEMATICĂ"

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviței No. 158. — București 2.

(Telefon: 3-9803).

M. O., IMPRIMERIA NAȚIONALĂ. — C. 18.455